Последовательностью Фибоначчи *называется последовательность* φ_n, *в которой первые два числа равны 1, а каждое следующее равно сумме двух предыдущих:* $\varphi_1 = \varphi_2 = 1, \varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1}$. *Первые* 10 *чисел Фибоначчи равны* $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$. *Иногда удобно рассматривать число Фибоначчи с нулевым номером* ($\varphi_0 = 0$). *Легко видеть, что рекуррентное соотношение* $\varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1}$ *при таком определении продолжает выполняться* ($\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_0$, $1 = 1 + 0$).

4.1. Сколькими способами можно разрезать полоску размером $2 \times n$ на «доминошки» (т.е. прямоугольники размером 1×2)?

4.2. Докажите с помощью математической индукции, что для всех натуральных n выполнено соотношение:

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \ldots + \varphi_n^2 = \varphi_n \varphi_{n+1} \tag{1}$$

4.3. Докажите соотношение (1), не используя индукцию[1].

4.4. Докажите следующие соотношения:

а) $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_n = \varphi_{n+2} - 1$;

б) $\varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_5 + \ldots + \varphi_{2n-1} = \varphi_{2n}$;

в) $\varphi_2 + \varphi_4 + \varphi_6 + \ldots + \varphi_{2n} = \varphi_{2n+1} - 1$.

4.5. Докажите тождество Кассини: $\varphi_{n+1}\varphi_{n-1} - \varphi_n^2 = (-1)^n$.

4.6. Вычислите сумму: $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{\varphi_k}{\varphi_{k-1}\varphi_{k+1}} = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{2}{1 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}\varphi_{n+1}}$.

4.7. Докажите с помощью математической индукции, что для всех натуральных m и n выполнено соотношение:

$$\varphi_{m+n} = \varphi_m \varphi_{n-1} + \varphi_{m+1} \varphi_n \tag{2}$$

4.8. На лестнице 10 ступенек. За один шаг можно подняться на одну ступеньку, либо перепрыгнуть через ступеньку. Сколько существует различных способов подняться по лестнице с первой ступеньки на 10-ю?

4.9. Докажите соотношение (2), не используя индукцию (указание: воспользуйтесь задачей 4.8).

4.10. Докажите с помощью математической индукции формулу Бине:

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

[1] Строго говоря, формулировка этой задачи не совсем корректна, так как в доказательстве любого утверждения, в котором есть произвольное натуральное число n, неявно присутствует индукция. Тем не менее, у данной задачи есть красивое «геометрическое» решение, которое позволяет не формулировать индукцию в явном виде.