

13. Теория Игр. Решения

13.0. Двое пиратов по очереди кладут монеты на круглый стол. Монеты нельзя ставить друг на друга или класть так, чтобы часть монеты находилась за краем стола. Проигрывает тот, кто не может положить монету. Вопрос: Кто из пиратов победит и как ему это сделать?

Решение: Первый пират кладет монету в центр стола, а затем кладет монеты симметрично монетам второго пирата относительно центра стола. При такой стратегии первый всегда имеет возможность сделать очередной ход.

Ответ: Победит первый пират.

13.1. Джек Воробей и Гиббс по очереди ломают сворованную ими у Лорда Беккета шоколадку в виде прямоугольника 5×10 . За ход можно разломать любой кусок по прямой линии между дольками. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре, если первым ходит Джек?

Решение: Изначально был всего один цельный кусок шоколада. Каждый последующий ход увеличивает количество отдельных кусочков на столе на один. В конечном итоге на столе должно остаться 50 отдельных кусочков. Следовательно, до завершения игры будет произведено суммарно 49 ходов, а значит последний ход будет делать первый игрок, а именно Джек. Это означает, что Гиббсу ходов не останется, а поэтому победит Джек.

Ответ: Победит Джек.

13.2. Однажды вместо клада в сундуке была найдена записка, на которой был написан набор из 10 единиц и 10 двоек. На обратной стороне было написано: “Езжайте ко мне в дом, отдайте сыну записку и сыграйте с ним в игру. За ход каждому из вас разрешается стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать двойку, а если разными - единицу. Если вам удастся получить единицу - клад ваш, а если нет, то сын оставит его себе.” Кто же в итоге получит клад?

Решение: Рассмотрим сумму всех чисел на записке. Заметим, что четность суммы при каждом ходе не меняется. Действительно, при стирании двух одинаковых чисел сумма уменьшается на четное число и прибавляется четная двойка, а при стирании двух разных - сумма уменьшается на нечетное число и прибавляется нечетная единица, дополняя сумму до четного числа. Поэтому в конце игры на доске останется двойка, а значит победит сын.

Ответ: Победит сын.

13.3. Джек Воробей поспорил со своим отцом Капитаном Тигом, а также с Капитаном Барбоссой, что сможет играть с ними в шахматы одновременно и даже более того, сможет получить по итогам партий как минимум одно очко. (За победу в шахматной партии дается 1 очко, за ничью пол-очка, за поражение - 0 очков) Как он смог этого добиться, если с первым он играл черными фигурами, а со вторым - белыми?

Решение: Первым ходил Капитан Тиг, играющий белыми. После этого Джек повторил его ход на другой доске с Барбоссой. Таким образом, в каждой из партий Джек Воробей повторял ходы соперника из другой партии. Фактически капитаны играли друг с другом на разных досках. Если один из соперников Джека получил 1 очко, то Джек получил 1 очко в партии с другим. В случае ничьей каждый игрок получил за каждую сыгранную партию по 0,5 очка, а тогда и Джек в сумме набрал $0,5 + 0,5 = 1$ очко.

13.4. Двое пиратов расположили в круг свои монеты и начали по очереди брать из них либо одну монету, либо две соседние(стоящие вплотную, без пустых промежутков). Выигрывает забравший себе последнюю монету. Кто из пиратов выиграет при правильной игре, если:

- a) у них 10 монет
- b) у них 11 монет
- c) у них n монет

Решение:

- a) Если своим первым ходом первый игрок берёт одну монету, то второй может взять одну монету напротив, тем самым получив две группы из 4 подряд лежащих монет.

Если своим первым ходом первый игрок берёт две монеты, то второй может взять две монеты напротив, тем самым получив две группы из 3 подряд лежащих монет.

Далее, второму будет достаточно делать симметричные первому ходы в другой группе монет и тогда у него всегда будет возможность сделать ход.

- б) Второму необходимо действовать аналогично с пунктом а), за исключением того, что при взятии первым ходом первого игрока одной монеты, второму необходимо взять две стоящие напротив. В случае же взятия первым двух монет, необходимо взять одну монету, стоящую напротив от них. Таким образом остаётся две группы из 4 монет, в которых второй может делать симметричные первому ходы.
- с) Достаточно понять, что пункт а) можно расширить на любое чётное количество монет, а пункт б) - на нечётное. Таким образом, пункт является прямым следствием пунктов а) и б).

Ответ: Во всех трёх пунктах победит второй пират.

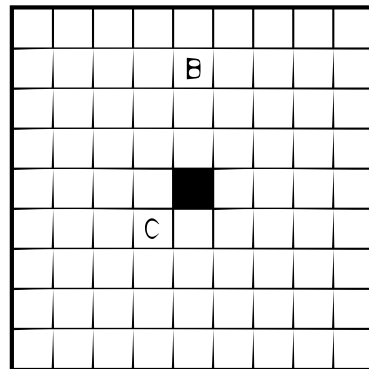
13.5. Калипсо предложила Джеку поучаствовать в затоплении ею острова. Прямоугольный остров имеет размеры 10×20 . Топить получается только квадратные области острова. Топить уже затопленные области нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из участников есть стратегия для победы и какая, если первым ходить разрешили Джеку?

Решение: Выигрышная стратегия есть у Джека. Достаточно, например, потопить центральный квадрат размера 10×10 . Тогда по краям от него останутся два прямоугольника размера 5×10 . В них Джеку достаточно повторять ходы, симметричные ходам Калипсо, но в другой зоне. Таким образом, у Джека до конца игры всегда будет возможность сделать очередной ход.

Ответ: Победит Джек.

13.6.

Лорд Беккет предложил Дейви Джонсу сыграть в игру. Он достал ему кусок шоколада размером 9×9 . Все квадратики в нём, кроме центрального, чисты. В центре же - яд. За один ход разрешено разломить шоколад вдоль любой вертикальной или горизонтальной линии и съесть ту часть, где нет яда. Тот, кому остался только ядовитый кусок, проигрывает и вынужден его съесть. Лорд Беккет, будучи джентльменом предоставляет первый ход Дейви Джонсу.



- а) Кто выиграет при правильной игре?
б) А если яд находится не в центре, а в клетке В?
с) А если яд находится в клетке С?

Решение:

- а) Для победы Лорду Беккету достаточно совершать ходы, симметричные ходам Дейви Джонса относительно центра квадрата.
- б) Дейви Джонс может своим первым ходом отломить и съесть нижние 6 горизонтальных рядов. После этого останется прямоугольник с ядом в центре. Далее для Дейви Джонса работает центрально-симметричная стратегия из пункта а).
- с) Клетка С находится на диагонали квадрата. Беккет может делать разломы вдоль прямых, симметричных прямым, вдоль которых делает разломы Дейви Джонс, относительно этой диагонали. Таким образом, после каждого хода Дейви Джонса будет получаться всё меньший и меньший квадрат, в котором клетка с дёгтем по-прежнему лежит на диагонали.

Ответ: Победит: а) Лорд Беккет, б) Дейви Джонс, с) Лорд Беккет.

13.7. В сундуке 30 дублонов. За один ход любой из двух пиратов может взять из него любое количество дублонов от 1 до 5. Проигрывает тот, кто останется с пустым сундуком после хода другого.

- а) Кто из пиратов выиграет при правильной игре?

б) А если в сундуке было 35 дублонов?

Решение:

- а) Заметим, что побеждает тот пират, который при любом ходе противника на предпоследнем ходу способен на последнем забрать остаток. Такое возможно только при остатке в 6 дублонов. Заметим, что изначальное количество дублонов равно 30 и значит кратно 6. Потому второй игрок может попросту сохранять кратность, дополняя каждый ход первого до 6 взятых дублонов. Тогда к последнему ходу первый будет гарантированно иметь 6 дублонов, что обеспечивает победу второму.
- б) Если дублонов было 35, то первому пирату достаточно взять первые 5 дублонов, что поставит второго пирата в позицию из пункта а). Далее первому пирату достаточно действовать по алгоритму из первого пункта.

Ответ: а) Победит первый пират, б) Победит второй пират.

13.8. На концах прямого пролива в скалах размером 1×21 последовательно двигаются в направлении противоположного конца пролива два корабля: слева – корабль “Черная Жемчужина”, справа – корабль “Летучий Голландец”. За час корабль может пройти 1, 2, 3 или 4 клетки. При этом корабли могут обплывать друг друга, но не могут стоять в одной клетке. Выигрывает тот, кто первым достигнет противоположного края пролива. Чёрная Жемчужина движется первой. Какой из кораблей выиграет при правильных действиях капитана?

Решение: Выигрывает Черная Жемчужина. Сначала капитану необходимо сделать ход длиной в 4 клетки, пока он не встанет на 5-ю клетку. Теперь очередь хода за Голландцем. Если он тоже сделает ход длины 4, очередной ход приведет его на клетку 17. Тогда Жемчужина следующим ходом должна пойти на клетку 8 и после ответа Голландца сходить так, чтобы между ним и вторым оказалось 3 клетки (легко видеть, что это всегда возможно). После этого Голландец будет вынужден пойти на 1, 2 или 3 клетки и окажется в итоге правее 9-й клетки. Значит, до финиша ему останется больше 8 клеток, и, чтобы добраться туда, он должен будет сделать 3 хода. Жемчужина же находится не левее 9-й клетки, и ей до финиша остается не более 12 клеток, которые она сумеет преодолеть за 3 хода. Однако Жемчужина ходит первой, значит она победит.

Рассмотрим теперь случай, когда первым ходом Голландца был ход менее, чем на 4 клетки. Тогда он после первого хода окажется более, чем в 16 клетках от цели, и для ее достижения ему понадобится минимум 5 ходов, а Жемчужине до цели остается ровно 16 клеток, и она сможет добраться до нее за 5 ходов (т.к. она ходит первой), даже если второй при встрече вынудит ее капитана сделать ход длины 3 вместо хода длины 4.

Ответ: Победит Черная Жемчужина.