

## 15. Комбинаторика 2

**15.0.** Пять пиратов сошли на берег и сняли в трактире две комнаты: одну каюту на двоих и одну каюту на троих. Сколькими способами можно выбрать тех, кто поселится:

**а)** в двухместной каюте; **б)** в трёхместной каюте?

*Решение.* а) Выбрать двоих из пятерых можно  $(5 \cdot 4)/2 = 10$  способами. Вспомним, откуда берётся деление на 2 и почему рассуждение «выберем первого жителя двухместного номера одним из пяти способов, затем второго одним из четырёх способов, получим ответ  $5 \cdot 4 = 20$ » неверно. Потому что способы «в двухместный - Пётр и Иван» и «в двухместный - Иван и Пётр» - на самом деле один и тот же способ, а при подсчёте  $5 \cdot 4 = 20$  он считался дважды, как и все остальные способы.

б) Выберем сначала первого жителя трёхместного номера одним из пяти способов, затем второго одним из четырёх способов, затем третьего одним из трёх способов, получим ответ  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ . Как и в пункте а), его надо разделить на 3? Тогда получим ответ

**Ответ:** **а)** 10 способов; **б)** 10 способов.

**15.1.** Сколькими способами пират Билли может вырезать из клетчатого паруса  $8 \times 10$  прямоугольник из 4 клеток?

*Решение.* Прямоугольник из 4 клеток бывает трёх видов:  $1 \times 4$ ,  $4 \times 1$  и  $2 \times 2$ .

Прямоугольников  $1 \times 4$  в таблице  $8 \times 10$ :

$$8 \cdot (10 - 4 + 1) = 8 \cdot 7 = 56.$$

Прямоугольников  $4 \times 1$ :

$$(8 - 4 + 1) \cdot 10 = 5 \cdot 10 = 50.$$

Квадратов  $2 \times 2$ :

$$(8 - 2 + 1)(10 - 2 + 1) = 7 \cdot 9 = 63.$$

Итого

$$56 + 50 + 63 = 169.$$

**Ответ:** 169.

**15.2.** Сколькими способами капитан может выстроить в шеренгу четырёх юнг и четырёх юнгесс так, чтобы среди первых четырёх была хотя бы одна девочка?

*Решение.* Всего можно выстроить 8 человек в ряд

$$8!$$

способами.

Вычтем плохие случаи, когда среди первых четырёх нет ни одной девочки, то есть там стоят все четыре мальчика. Тогда мальчиков можно переставить между собой  $4!$  способами, и девочек на последних четырёх местах тоже  $4!$  способами. Значит, плохих расстановок

$$4! \cdot 4!.$$

Искомое число:

$$8! - 4! \cdot 4! = 40320 - 576 = 39744.$$

**Ответ:** 39744.

**15.3.** В пиратском наборе домино 28 косточек. Сколько косточек было бы в наборе, если бы числа на них менялись от 0 до 12, а не от 0 до 6?

*Решение.* Косточка домино задаётся неупорядоченной парой чисел, причём числа могут совпадать. Значит, нужно посчитать количество неупорядоченных пар с повторениями из 13 чисел  $(0, 1, \dots, 12)$ .

Это равно

$$\frac{13 \cdot 14}{2} = 91.$$

Или иначе: косточек с одинаковыми числами 13, а с разными числами

$$C_{13}^2 = 78,$$

всего

$$13 + 78 = 91.$$

**Ответ:** 91.

**15.4.** Из 16 спичек сложен ромб со стороной 2 спички, разбитый на треугольные клетки со стороной в одну спичку (см. рисунок). А сколько спичек нужно, чтобы сложить такой ромб со стороной в 10 спичек?

*Решение.* Есть по 11 косых отрезков длины 10 двух направлений, в них всего

$$11 \cdot 10 \cdot 2 = 220$$

спичек.

Горизонтальных спичек

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 10 + 9 + \dots + 1 = \\ & = (1 + 2 + \dots + 10) + (1 + 2 + \dots + 9) = 55 + 45 = 100. \end{aligned}$$

Итого

$$220 + 100 = 320.$$

**Ответ:** 320.

**15.5.**

- а) Сколькими способами пират может разложить в таблице  $2 \times 4$  восемь разных карт сокровищ?  
б) Сколькими способами боцман может разложить восемь разных сундуков по восьми разным каютам, если в каждой каюте стоит ровно один сундук?

*Решение.* И в пункте **а)**, и в пункте **б)** речь идёт о размещении 8 различных объектов по 8 различным местам.

**а)** В таблице  $2 \times 4$  есть 8 различных клеток. Число способов разложить по ним 8 разных карт равно

$$8! = 40320.$$

**б)** Аналогично, распределить 8 разных сундуков по 8 разным каютам можно

$$8! = 40320.$$

**Ответ:** в обоих пунктах 40320.

**15.6.** Сколькими способами можно расставить 30 томов на полке так, чтобы тома 1 и 2 стояли рядом?

*Решение.* Считаем тома 1 и 2 одним блоком. Тогда вместе с остальными 28 томами получаем 29 объектов.

Их можно расставить

$$29!$$

способами.

Но внутри блока тома 1 и 2 можно поставить двумя способами: (1, 2) или (2, 1).

Значит, всего

$$29! \cdot 2.$$

**Ответ:**  $2 \cdot 29!$ .

**15.7.** Сколькими способами можно расставить 30 томов на полке так, чтобы тома 3 и 4 рядом не стояли?

*Решение.* Всего расстановок 30 томов:

$$30!$$

Вычтем те, где тома 3 и 4 стоят рядом. Склеим их в один блок. Тогда получаем 29 объектов, которые можно расставить

$$29!$$

способами. Внутри блока тома 3 и 4 могут стоять в двух порядках, так что плохих случаев

$$2 \cdot 29!$$

Следовательно, искомое число равно

$$30! - 2 \cdot 29!$$

**Ответ:**  $30! - 2 \cdot 29!$ .

**15.8.** У пиратов есть 10 рубиновых роз и 8 георгинов. Нужно собрать букет для губернатора из 2 роз и 3 георгинов. Сколько есть различных букетов?

*Решение.* Нужно независимо выбрать:

- 2 розы из 10;
- 3 георгина из 8.

Число способов выбрать розы:

$$C_{10}^2.$$

Число способов выбрать георгины:

$$C_8^3.$$

По правилу умножения общее число букетов:

$$C_{10}^2 C_8^3.$$

Можно посчитать:

$$C_{10}^2 = 45, \quad C_8^3 = 56,$$

поэтому

$$45 \cdot 56 = 2520.$$

**Ответ:**  $C_{10}^2 C_8^3 = 2520$ .

**15.9.** Сколькими способами расставить 12 белых и 12 чёрных шашек на чёрных полях шахматной доски?

*Решение.* На шахматной доске 32 чёрных поля.

Сначала выберем 12 полей для белых шашек:

$$C_{32}^{12}.$$

После этого останется 20 чёрных полей, из которых надо выбрать 12 для чёрных шашек:

$$C_{20}^{12}.$$

Поэтому общее число способов равно

$$C_{32}^{12} C_{20}^{12}.$$

**Ответ:**  $C_{32}^{12} C_{20}^{12}$ .

**15.10.** Палубу размером 6 м × 6 м разбили внутренними деревянными перегородками на каюты 1 м × 2 м. Чему может быть равна общая длина деревянных перегородок? Найдите все ответы.

*Решение.* Площадь конюшни равна  $36 \text{ м}^2$ , а площадь каждого стойла равна  $2 \text{ м}^2$ , поэтому стойл

$$36 : 2 = 18.$$

Периметр каждого стойла равен 6 м, значит сумма периметров всех стойл равна

$$18 \cdot 6 = 108 \text{ м}.$$

Из них 24 м приходятся на внешние бетонные стены конюшни, а остальные

$$108 - 24 = 84 \text{ м}$$

— на внутренние деревянные перегородки.

Но каждая внутренняя перегородка входит в периметры двух соседних стойл, поэтому её посчитали дважды. Значит, общая длина перегородок равна

$$84 : 2 = 42 \text{ м}.$$

**Ответ:** 42 м.

**15.11.** На Острове игрушек делают проволочные кубики, в вершинах которых стоят шарики восьми цветов. Сколько разных моделей кубиков может выпускать пиратская фабрика?

*Решение.* Нужно раскрасить 8 вершин куба в 8 разных цветов, считая одинаковыми раскраски, которые переходят друг в друга поворотом куба.

Если не учитывать вращения, то расставить 8 разных цветов по вершинам можно

$$8!$$

способами.

У куба 24 вращения. Так как все 8 цветов различны, никакое нетривиальное вращение не сохраняет раскраску. Значит, каждая модель считается ровно 24 раза.

Поэтому число различных моделей равно

$$\frac{8!}{24} = \frac{40320}{24} = 1680.$$

**Ответ:** 1680.

**15.12.** Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 31 пашку так, чтобы никакие две не стояли в клетках с общей стороной?

*Решение.* Разобьём доску на 16 квадратов  $2 \times 2$ . Ясно, что один из квадратов особый: в нём только одна пашка, а в остальных пятнадцати — по две пашки, причём в противоположных углах.

В каждом неособом квадратице обе пашки стоят либо на белых, либо на чёрных клетках. Тогда и в соседнем по стороне квадратице пашки стоят на клетках того же цвета. Значит, вне особого квадрата все пашки стоят на клетках одного цвета: либо все на белых, либо все на чёрных.

Тогда получаем 64 расстановки: отмечаем любую клетку и занимаем пашками все клетки того же цвета, кроме отмеченной.

Но есть ещё 4 “разноцветные” расстановки: особый квадрат должен быть угловым, и тогда в нём можно поставить пашку на клетку противоположного цвета.

Итого

$$64 + 4 = 68.$$

**Ответ:** 68.

---

Режим для организаторов: условия + решения