

## 16. Инвариант

*Инвариант* (от лат. *invariantis* - неизменяющийся), в математике - величина, остающаяся неизменной при тех или иных преобразованиях. Пример:

- В класс заходят по по 2 человека, инвариант- чётность количества учеников.
- На окружности написаны числа. Разрешается прибавить 1 к двум соседним числам. Инвариант- Сумма чисел на четных позициях минус сумма на нечетных позициях не меняется.
- Вы складываете по 3 числа идущих подряд, инвариант- все суммы будут делиться на 3

**16.0.** На доске написано десять плюсов и пятнадцать минусов. Разрешается стереть любые два знака и написать вместо них плюс, если они одинаковы, и минус в противном случае. Какой знак останется на доске после выполнения двадцати четырех таких операций? При сдаче каждой задачи необходимо предьявить инвариант!

**16.1.** 100 обезьян выстроились в ряд. Обезьяны, стоящие через одну, могут меняться местами, перепрыгивая через обезьяну между ними. Могут ли обезьяны с помощью таких прыжков встать в обратном порядке?

**16.2.** Турист едет по одной прямой дороге. Сначала он проехал 1 км от дома, затем 3 км в том же или в противоположном направлении, затем 5 км в том же или в другом направлении и т. д. Могло ли случиться так, что после 57-го этапа пути он оказался в исходной точке?

**16.3.** Турист отправился в путешествие по разным странам. Сначала у него была одна монета — 1 рубль. В каждом городе он может воспользоваться обменным автоматом, который меняет одну монету на пять монет другой страны. Например, 1 рубль можно обменять на 5 тугриков, потом 1 тугрик — на 5 песо, потом 1 песо — на 5 динаров и так далее. Может ли турист после нескольких таких обменов получить ровно 2027 монет?

**16.4.** Шесть друзей путешествуют по разным городам. К некоторому моменту первый из них посетил 1 город, второй — 2 города, третий — 3, четвертый — 4, пятый — 5, а шестой — 6 городов. Каждый следующий день можно выбрать любых двух друзей и отправить каждого из них ещё в один новый город. Можно ли за несколько дней сделать так, чтобы у всех шестерых стало одинаковое количество посещённых городов?

**16.5.** Из стакана молока три ложки содержимого переливают в стакан с чаем и небрежно помешивают. Затем зачерпывают три ложки полученной смеси и переливают их обратно в стакан с молоком. Чего теперь больше: чая в стакане с молоком или молока в стакане с чаем?

**16.6.** В каждой ячейке ящика сидит какое-то животное: ежик или хомяк. За один ход можно поменять животных в одной строке или в одном столбце: каждый ежик становится хомячком, а каждый хомячок становится ежиком. Мария Францевна посадила в одну ячейку ежика, а в другие — хомячков. Можно ли сделать так, чтобы в результате таких действий в клетке были только ежики, если размер ящика: а)  $2 \times 2$  б)  $3 \times 3$  в)  $4 \times 4$

**16.7.** На нить нанизаны две бусины, слева — красная бусина, справа — синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух бусин одного цвета подряд в любом месте нити и удаление любых двух соседних одноцветных бусин. Можно ли за конечное число операций оставить на нити ровно две бусины: красную справа, а синюю — слева?

**16.8.** В таблице  $11 \times 11$  в каждой клетке стоит знак «+» или «-». За одну операцию разрешается поменять знак во всех клетках "креста" на противоположный. (Крест — объединение произвольного столбца и строки.) Верно ли, что из любого начального положения знаков можно получить таблицу со всеми плюсами?

**16.9.** В заповеднике имеется прямоугольная решётка размером  $m \times n$ . Сначала робот-смотритель Иса случайным образом активирует один узел решётки (ставит на нём «1»). Затем включается алгоритм распространения сигнала: на каждом шаге разрешается активировать любой неактивный узел, у которого количество уже активированных соседей (по стороне) нечетно. Сможет ли алгоритм в итоге активировать все узлы решётки при любом начальном выборе узла Исой, если размеры решётки: а)  $8 \times 9$ ; б)  $8 \times 10$ ?

## 16. Инвариант

*Инвариант* (от лат. *invariantis* - неизменяющийся), в математике - величина, остающаяся неизменной при тех или иных преобразованиях. Пример:

- В класс заходят по по 2 человека, инвариант- чётность количества учеников.
- На окружности написаны числа. Разрешается прибавить 1 к двум соседним числам. Инвариант- Сумма чисел на четных позициях минус сумма на нечетных позициях не меняется.
- Вы складываете по 3 числа идущих подряд, инвариант- все суммы будут делиться на 3

**16.0.** На доске написано десять плюсов и пятнадцать минусов. Разрешается стереть любые два знака и написать вместо них плюс, если они одинаковы, и минус в противном случае. Какой знак останется на доске после выполнения двадцати четырех таких операций? При сдаче каждой задачи необходимо предьявить инвариант!

**16.1.** 100 обезьян выстроились в ряд. Обезьяны, стоящие через одну, могут меняться местами, перепрыгивая через обезьяну между ними. Могут ли обезьяны с помощью таких прыжков встать в обратном порядке?

**16.2.** Турист едет по одной прямой дороге. Сначала он проехал 1 км от дома, затем 3 км в том же или в противоположном направлении, затем 5 км в том же или в другом направлении и т. д. Могло ли случиться так, что после 57-го этапа пути он оказался в исходной точке?

**16.3.** Турист отправился в путешествие по разным странам. Сначала у него была одна монета — 1 рубль. В каждом городе он может воспользоваться обменным автоматом, который меняет одну монету на пять монет другой страны. Например, 1 рубль можно обменять на 5 тугриков, потом 1 тугрик — на 5 песо, потом 1 песо — на 5 динаров и так далее. Может ли турист после нескольких таких обменов получить ровно 2027 монет?

**16.4.** Шесть друзей путешествуют по разным городам. К некоторому моменту первый из них посетил 1 город, второй — 2 города, третий — 3, четвертый — 4, пятый — 5, а шестой — 6 городов. Каждый следующий день можно выбрать любых двух друзей и отправить каждого из них ещё в один новый город. Можно ли за несколько дней сделать так, чтобы у всех шестерых стало одинаковое количество посещённых городов?

**16.5.** Из стакана молока три ложки содержимого переливают в стакан с чаем и небрежно помешивают. Затем зачерпывают три ложки полученной смеси и переливают их обратно в стакан с молоком. Чего теперь больше: чая в стакане с молоком или молока в стакане с чаем?

**16.6.** В каждой ячейке ящика сидит какое-то животное: ежик или хомяк. За один ход можно поменять животных в одной строке или в одном столбце: каждый ежик становится хомячком, а каждый хомячок становится ежиком. Мария Францевна посадила в одну ячейку ежика, а в другие — хомячков. Можно ли сделать так, чтобы в результате таких действий в клетке были только ежики, если размер ящика: а)  $2 \times 2$  б)  $3 \times 3$  в)  $4 \times 4$

**16.7.** На нить нанизаны две бусины, слева — красная бусина, справа — синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух бусин одного цвета подряд в любом месте нити и удаление любых двух соседних одноцветных бусин. Можно ли за конечное число операций оставить на нити ровно две бусины: красную справа, а синюю — слева?

**16.8.** В таблице  $11 \times 11$  в каждой клетке стоит знак «+» или «-». За одну операцию разрешается поменять знак во всех клетках "креста" на противоположный. (Крест — объединение произвольного столбца и строки.) Верно ли, что из любого начального положения знаков можно получить таблицу со всеми плюсами?

**16.9.** В заповеднике имеется прямоугольная решётка размером  $m \times n$ . Сначала робот-смотритель Иса случайным образом активирует один узел решётки (ставит на нём «1»). Затем включается алгоритм распространения сигнала: на каждом шаге разрешается активировать любой неактивный узел, у которого количество уже активированных соседей (по стороне) нечетно. Сможет ли алгоритм в итоге активировать все узлы решётки при любом начальном выборе узла Исой, если размеры решётки: а)  $8 \times 9$ ; б)  $8 \times 10$ ?