2.0. а) Перемножили несколько целых чисел, среди которых есть чётные. Чётным или нечётным будет их произведение?

б) Перемножили несколько нечётных чисел. Чётным или нечётным будет их произведение?

в) Сложили несколько нечётных чисел. Чётной или нечётной будет их сумма?

г) За 1 день Петенька может посмотреть один, три или пять тиктоков. Может ли он за 12 дней посмотреть 27 тиктоков?

Ответ:

а) Чётным

б) Нечётным

в) Может быть как четной, так и нечетной

г) Нет

Решение:

а) следует из свойства Ч × Н = Ч

б) следует из свойства Н × Н = Н

в) следует из свойства Ч + Н = Н и Н + Н = Ч

г) сумма 12 нечетных чисел чётна, а 27 — нечётно. Значит 27 набрать нельзя

2.1. Жёлуди дают 1, 3, 5 или 7 очков. У Копатыча — 143 очка, у Ёжика — 134. Может ли желудей у них быть поровну?

Ответ: Нет

Решение:

Все «номиналы» нечётные ⇒ чётность суммы равна чётности количества предметов, то есть нечётное количество желудей дает нечетную сумму, чётное количество желудей дает четную. 143 ⇒ у Копатыча желудей нечетно; 134 ⇒ у Ёжика чётно. Нечётное ≠ чётному ⇒ поровну невозможно.

2.2. На конкурсе пирогов две равные команды голосуют без воздержавшихся. Объявили перевес 23 голоса. Бараш говорит: «Не сходится». Почему?

Решение:

Общее число голосов чётно ⇒ два распределения голосов («за 1 команду» и «за 2 команду») одной чётности ⇒ разность должна быть чётной. 23 — нечётно ⇒ объявленный перевес невозможен.

2.3. Нюша выписала цифры 1–9 по порядку и ставит между соседними «+» или «−». Может ли итоговая сумма быть нулём?

Ответ: Нет

Решение:

Ноль получиться не может, так как количество нечётных слагаемых равно 5, нечётно.

2.4. У Совуньи 20 платков. 17 смешариков по очереди подходят и либо забирают 1 платок, либо дают 1 платок Совунье. Возможно ли, что после ухода последнего смешарика, у Совуньи останется 10 платков?

Ответ: Нет

Решение:

Каждый шаг меняет чётность. После 17 шагов чётность сменится: было чётно ⇒ станет нечётно. 10 — чётно, 20

— чётно ⇒ нельзя.

2.5. Пин дал по 2 шестерёнки с номерами 1–5 Крошу и Барашу. Крош видит свои две и точно знает: у Бараша сумма чётная. Какие шестерёнки у Кроша?

Ответ: 2 и 4
Решение:
Перебор по чётности у Кроша:
- «ч+н»: у Бараша может оказаться «ч+н» (нечётно) ⇒ нет гарантии, что шестерёнки одной чётности.
- «н+н»: у Бараша либо «ч+ч» (чётно), либо «ч+н» (нечётно) ⇒ нет гарантии, что шестерёнки одной чётности.
- «ч+ч»: это {2,4}. Тогда у Бараша останутся две из {1,3,5}, сумма нечётная+нечётная = чётная — гарантия есть.

2.6. Нюша раскладывает 7 пирожков «начинкой вниз». За один ход переворачивает ровно 4 любых. Получится ли сделать все пирожки «начинкой вверх»?

Ответ: Нет
Решение:
Пусть в некоторый момент мы перевернули 4 пирожка, из которых k пирожков стояли начинкой вниз, а 4 - k - начинкой вверх. После переворачивания из этих четырёх пирожков k будут стоять начинкой вверх, а 4 - k - начинкой вниз. Таким образом, количество пирожков, стоящих начинкой вниз, изменится на чётное число 4 - k - k = 4 - 2k. Инвариант: чётность числа «неправильных» (начинкой вниз). В начале — 7. Каждый ход меняет это число на 4-2k (k - кол-во пирожков начинкой вниз) ⇒ чётность сохраняется, значит 0 мы не получим.

2.7. Кар-Карыч объявил конкурс - «Вернуться на СТАРТ за 25 танцевальных па». Варианты танцев:
а) танец по линии: каждый шаг — нечётное число см вперёд/назад;
б) электроник-данс: шаг на 1 м по сетке Север/Юг/Запад/Восток;
в) рыцарский вальс: ходы шахматного коня;
г) вальс в разных странах: шаг — диагональ прямоугольника a на b (целые константы a,b), направление — одно из четырёх.
Возможно ли это в каждом из вариантов?

Ответ: Во всех ответ нет
Решение:
а) Сумма 25 нечётных со знаками — нечётна ⇒ 0 невозможно.
б) Чётность x+y меняется каждый шаг ⇒ через 25 будет другая ⇒ нельзя.
в) Конь меняет цвет клетки каждый ход ⇒ после 25 — другой цвет ⇒ нельзя.
г) Нужно, чтобы в конце сумма +- a = сумма +- b = 0; но сумма 25 знаков ±1 не может дать 0 ⇒ нельзя.

2.8. Лосяш выписал 123 числа. Нюша хочет стереть одно так, чтобы сумма стала чётной. Всегда ли получится? А если чисел 124?

Ответ: 123 да; 124 нет
Решение:
а) Пусть сумма S. Если S нечётна — есть нечётное; стираем его ⇒ сумма чётная. Если S чётна — существует чётное (иначе 123 нечётных дали бы нечётную сумму) стираем его ⇒ чётность сохраняется. Всегда можно.
б) Нет. Контрпример: 124 нечётных ⇒ сумма чётна; удаление любого делает её нечётной

2.9. В Круглой школе рассадили k смешариков двух деревень по кругу. Деревни враждуют между собой. Известно, что число пар соседей-друзей равно числу пар соседей-врагов. Докажите, что k кратно 4.

Решение:
Разобьём круг на максимальные блоки подряд сидящих из одной деревни. Переходов между деревнями чётное число (идём по кругу и возвращаемся в исходную деревню), где каждый переход — это вражеская соседская пара ⇒ E (пара соседей-врагов, что в свою очередь равно F - числу пар соседей-друзей) чётно. k=E+F=2E, а раз E чётно, то k кратно 4

2.10. Пин строит 2 башни из солнечных и лунных кристаллов: класть можно только на противоположный тип. 10-й и 11-й кристаллы — солнечные, 25-й — лунный. Какого типа будет 26-й?

Ответ: Солнечный
Решение:
Пусть S - Солнечный, L - Лунный. Два подряд S (10-й и 11-й) вынуждают положить их на разные башни: после 10-го на выбранной башне сверху S; 11-й S нельзя класть на S, значит, он идёт на другую башню (либо пустую, либо с L сверху) и делает её верхний кристалл S. Итак, после 11-го на обеих вершинах стоит S. Далее 12…25 — 14 ходов. Каждый ход меняет тип только на одной вершине ⇒ «совпадают/различаются» вершины переключаются каждый раз. Чётное число ходов сохраняет «совпадают» вершины. Дано, что 25-й — L, следовательно, после 25-го вершины совпадают и обе — L. Тогда 26-й можно положить только S (иначе класть будет некуда).

2.11. Кар-Карыч 25 раз делает трюк с тремя платочками: один платочек пролетает строго между двумя другими и кладётся. Может ли в конце вернуться исходный порядок?

Ответ: Нет
Решение:
Обозначим платки за A, B и C. Будем называть расположение платков *правильным*, если обходя вершины треугольника *ABC* в порядке *A-B-C*, мы получим обход по часовой стрелке, и *неправильным* в противном случае. Легко видеть, что при каждом «пролёте» тип расположения меняется. Значит, после каждого *нечётного* пролёта, расположение платков будет иным, нежели в самом начале. (*для преподавателей* - идея четности здесь исходит от четности перестановки, хоть мы это и не упоминаем ни в задаче, ни в решении)