

Вступительная работа 2025/2026 учебного года

9-11 класс. Все задачи и решения

1. **Условие.** При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$$

наименьшая?

Ответ. $a = 1$

Решение. Пусть x_1, x_2 — корни. По теореме Виета $x_1 + x_2 = a - 2$, $x_1 x_2 = -a - 3$. Имеем

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (a - 2)^2 - 2(-a - 3) = a^2 - 2a + 10 = (a - 1)^2 + 9.$$

Остаётся проверить, что при $a = 1$ дискриминант уравнения неотрицателен.

2. **Условие.** Юра начинает спускаться по лестнице в тот же момент, когда Илья начинает по ней подниматься. После момента, когда ребята встретились, Юре потребовалось ещё 16 секунд, чтобы дойти до нижнего конца лестницы, а Илье — 36 секунд, чтобы дойти до верхнего конца. Через сколько секунд после начала движения ребята встретились?

Ответ. 24 секунды.

Решение. Пусть x — скорость Юры, y — скорость Ильи, t — время до момента встречи. Тогда Юра до момента встречи прошёл расстояние tx . Это же расстояние Илья прошёл за 36 секунд, поэтому получаем уравнение $tx = 36y$. Аналогично, получаем уравнение $16x = ty$. Поделив одно на другое, имеем $t^2 = 36 \cdot 16$.

3. **Условие.** Про натуральные числа n, m, k, l известно, что $nm + kl$ делится на $n + k$. Докажите, что $nl + mk$ делится на $n + k$.

Ответ. -

Решение. Имеем равенство $nl + mk = (n + k)(m + l) - (nm + kl)$, в котором все слагаемые из правой части делятся на $n + k$.

4. **Условие.** Каждую точку прямой покрасили в один из двух цветов. Обязательно ли найдётся отрезок, у которого концы и середина покрашены в один цвет?

Ответ. Да.

Решение. Введем на прямой координату так, что точки -1 и 1 покрашены в один цвет. Если среди точек -3 и 3 есть точка такого же цвета, то один из отрезков $[-3, 1]$ и $[-1, 3]$ удовлетворяет условию. В противном случае, в зависимости от цвета 0 , либо отрезок $[-1, 1]$, либо $[-3, 3]$ удовлетворяет условию.

5. **Условие.** Высоту $АН$ треугольника ABC продлили до повторного пересечения с описанной окружностью в точке M . Отрезок MN — биссектриса треугольника AMB . Найдите длину отрезка NB , если все стороны треугольника ABC равны 1.

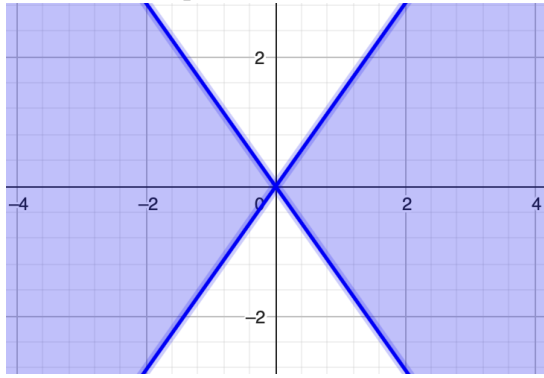
Ответ. $\frac{1}{3}$.

Решение. Из подобия треугольников ABM и AHB получаем равенство $\frac{AM}{BM} = \frac{AB}{HB}$. Выражение справа от равенства равно 2, так как $\angle HAB = 30^\circ$. По свойству биссектрисы MN в треугольнике AMB получаем $\frac{AN}{NB} = \frac{AM}{BM} = 2$. Так как $AN + NB = 1$, находим, что $NB = \frac{1}{3}$.

6. **Условие.** Изобразите на координатной плоскости множество всех таких точек $(a; b)$, что система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x + y = b \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.



Ответ.

Решение. Выразим y из второго уравнения и подставим в первое: $x^2 + (b - x)^2 = a^2$. Условие существования решения у системы эквивалентно неотрицательности дискриминанта этого уравнения:

$$(-2b)^2 - 8(b^2 - a^2) = 8a^2 - 4b^2 = 4(\sqrt{2}a + b)(\sqrt{2}a - b) \geq 0.$$

Эту задачу можно решить и графически.

7. **Условие.** Многочлен третьей степени с целыми коэффициентами имеет три различных натуральных корня. В нуле этот многочлен принимает положительное значение, меньшее 25. Сколько существует таких многочленов?

Ответ. 26.

Решение. Представим многочлен в виде $k(x - a)(x - b)(x - c)$, где $1 \leq a < b < c$ — три натуральных числа, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $P(0) = -kabc \in \{1, 2, \dots, 24\}$, откуда $abc \leq 24$. Остаётся перебрать подходящие тройки чисел a, b, c и посчитать для каждой количество подходящих k .

8. **Условие.** В сумме $M, (EX) + M, A(T)$ все цифры зашифрованы буквами, различным буквам соответствуют различные цифры. Может ли эта сумма равняться целому числу? Если да, то приведите пример, если нет, то докажите.

Ответ. Нет.

Решение. Из условия получаем, что $0, (EX) + 0, A(T)$ должно равняться 0, 1 или 2. В силу того, что цифры различны, остается только возможность $0, (EX) + 0, A(T) = 1$. После преобразований получаем равенство $100E + 10X + 99A + 11T = 990$, из которого следует делимость $X - E$ на 11, а это невозможно для различных цифр X и E .