Теоретические сведения

Под *множеством* понимают совокупность объектов произвольной природы. Этими объектами могут быть и другие множества, однако «совокупность» всех множеств сама множеством не является, так как это приводит к парадоксам.

Объекты, входящие в состав множества называются *элементами множества*. Обозначение: $x \in A$ (читается «x — элемент множества A» или «x принадлежит A»).

Множества можно задавать перечисляя элементы в фигурных скобках, например, $\{1, 2, 3\}$, либо выбирая из имеющего множества элементы, удовлетворяющее условию, например, множество чётных чисел можно записать как $\{x \in \mathbb{Z}\colon x \mathrel{\vdots} 2\}$.

Множество B называется *подмножеством* множества A (обозначение: $B \subset A$ или $B \subseteq A$), если любой элемент множества B является также элементом множества A. Если при этом $B \neq A$, то B называется *собственным подмножеством* множества A (обозначается $B \subsetneq A$). Множество всех подмножеств множества A обозначается 2^A.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством* (обозначается $\varnothing$). Пустое множество является подмножеством любого множества.

Основные операции над множествами:

- *Пересечение* $A \cap B = \{x\colon x \in A \wedge x \in B\}$ состоит из элементов, принадлежащих одновременно и A, и B.
- *Объединение* $A \cup B = \{x\colon x \in A \vee x \in B\}$ состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B.
- *Разность* $A \setminus B = \{x\colon x \in A \wedge x \notin B\}$ состоит из элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B.
- *Симметрическая разность* $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ состоит из элементов, принадлежащих ровно одному из множеств A и B (но не обеим сразу).
- *Декартово произведение* $A \times B = \{(x, y)\colon x \in A \wedge y \in B\}$ состоит из упорядоченных пар (x, y), где первый элемент взят из множества A, а второй — из множества B.

Если все множества, рассматриваемые в задаче, являются подмножествами какого-то объемлющего («универсального») множества U, то можно рассмотреть ещё одну операцию:

- *Дополнение* $\overline{A} = U \setminus A$ — множество из элементов, дополняющих A до универсального. Ясно, что результат данной операции зависит от выбора множества U. Иногда этот выбор ясен из контекста или не принципиален, иногда его приходится уточнять.

Множества бывают конечными и бесконечными. *Мощностью* конечного множества A называется количество его элементов. Обозначение: $|A|$ или $\#A$.

Отображением (или *функцией*) $f\colon A \to B$ из множества A в множество B называется правило, сопоставляющее каждому элементу x множества A ровно один элемент y множества B. Обозначение: $f\colon x \mapsto y$ или $y = f(x)$. Элемент $y = f(x)$ называется *образом* элемента x при отображении f. Множество A называется областью определения отображения f. *Прообразом* множества $Y \in B$ при отображении f называется множество $f^{-1}(Y) = \{x \in A\colon f(x) \in B\}$.

Графиком отображения $f\colon A \to B$ называется подмножество декартова произведения $A \times B$, состоящее из всех пар вида $(x, f(x))$, где $x \in A$. Для того, чтобы подмножество $G \subset A \times B$ было графиком некоторого отображения из A в B, необходимо и достаточно, чтобы $\forall x \in A$ в множестве G была ровно одна пара, в которой первый элемент равен x. Легко видеть, что отображение однозначно задаётся своим графиком, поэтому в некоторых учебниках между ними не делают разницы, определяя отображение как подмножество декартова произведения, удовлетворяющее указанному свойству.

Множество всех возможных отображений из множества A в множество B обозначется B^A.

Отображение $f\colon A \to B$ называется *инъективным*, если в каждый элемент множества B переходит не более одного элемента множества A, то есть если $\forall y \in B$ имеем $|f^{-1}(\{y\})| \leqslant 1$.

Отображение $f\colon A \to B$ называется *сюръективным*, если в каждый элемент множества B переходит хотя бы один элемент множества A, то есть если $\forall y \in B$ имеем $|f^{-1}(\{y\})| \geqslant 1$.

Отображение $f\colon A \to B$ называется *биективным*, если в каждый элемент множества B переходит ровно один элемент множества A, то есть если $\forall y \in B$ имеем $|f^{-1}(\{y\})| = 1$.

Легко видеть, что отображение биективно тогда и только тогда, когда оно одновременно и инъективно, и сюръективно. Биективные отображения называются также *взаимно однозначными отображениями* или *биекциями*. Для биективного отображения $f\colon A \to B$ определено обратное отображение $f^{-1}\colon B \to A$. Обозначение обратного отображения похоже на обозначение прообраза, но строго говоря, это не одно и то же: прообраз определяется для подмножества множества B и определён всегда, тогда как обратное отображение действует на элементы множества B, и существует только если отображение f биективно. Похожее обозначение оправдано тем, что если обратное отображение f^{-1} существует, то прообраз $f^{-1}(\{y\})$ одноэлементного множества $\{y\}$ состоит из образа $f^{-1}(y)$ элемента y при отображении f^{-1}, то есть $f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$.

Пусть заданы отображения $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$. Тогда их композицией называется отображение $g \circ f\colon A \to C$, переводящее любой элемент $x \in A$ в $g(f(x))$. Композиция функций обладает свойством ассоциативности, то есть для любых отображений h, g, f имеет место соотношение $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ при условии, что области определения отображений таковы, что указанные композиции имеют смысл.

Зафиксируем некое универсальное множество U, и будем рассматривать его подмножества. *Характеристической* (или *индикаторной*) функцией множества $A \subset U$ называется функция $\chi_A\colon U \to \{0, 1\}$, определённая следующим образом: $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \notin A \end{cases}$. Можно показать, что при переходе от множеств к их характеристическим функциям теоретико-множественным операциям будут соответствовать логические операции над значениями характеристических функций:

Действие с множествами	Логическая операция	соотношение
пересечение ($\cap$)	конъюнкция, логическое «и» ($\wedge$)	$\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x)$
объединение ($\cup$)	дизъюнкция, логическое «или» ($\vee$)	$\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x)$
симметрическая разность ($\triangle$)	сложение по модулю 2, исключающее «или» ($\oplus$)	$\chi_{A\triangle B}(x) = \chi_A(x) \oplus \chi_B(x)$
дополнение	отрицание, логическое «не» ($\neg$)	$\chi_{\overline{A}}(x) = \neg\chi_A(x)$

Эти свойства удобно использовать для доказательства различных теоретико-множественных соотношений, например, *формулы включений-исключений*, позволяющей вычислить мощность объединения пересекающихся множеств:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| - \\ - \ldots - |A_{n-1} \cap A_n| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + \\ + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| + \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$