

Под *графом* понимают набор точек (*вершин*), соединённых линиями (*рёбрами*). Как правило, не имеет значения, как именно линии изображены, важно только то, какие вершины с какими соединены.

Граф называется *связным*, если от любой вершины до любой другой существует путь из рёбер. Несвязный граф представляется в виде объединения связанных подграфов, называемых *компонентами связности*.

Граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости без пересечений рёбер. Планарный граф вместе с конкретным изображением на плоскости называется *плоским графом*.

В плоском связном графе (а также в выпуклом¹ многограннике) выполняется *формула Эйлера*: $V - E + F = 2$, где V — количество вершин (vertices), E — количество рёбер (edges), F — количество граней (faces).

10.1. В стране **30** озёр, соединённых между собой **40** каналами так, что от каждого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в этой стране островов?

10.2. Пусть в плоском связном графе без петель и кратных рёбер $V \geq 3$. Докажите, что $2E \geq 3F$. С помощью формулы Эйлера выведите отсюда неравенство $E \leq 3V - 6$

10.3. Символом K_5 обозначается полный граф на пяти вершинах, то есть такой, в котором 5 вершин, и каждая соединена с каждой. Докажите, что этот граф не является планарным. *Указание: воспользуйтесь задачей 2.*

10.4. Докажите, что в любом плоском связном графе без петель и кратных рёбер существует вершина степени ≤ 5 . *Указание: воспользуйтесь задачей 2.*

10.5. Во вписанном **100**-угольнике провели несколько диагоналей. Они разбили многоугольник на **200** частей: **30** пятиугольников, **70** четырёхугольников и **100** треугольников. Найдите число точек пересечения проведенных диагоналей внутри **100**-угольника.

10.6. Как изменится формула Эйлера для плоского графа состоящего из k компонент связности.

10.7. (Задача о футбольном мяче) В выпуклом многограннике чёрные грани — правильные пятиугольники, а белые — правильные шестиугольники. В каждой вершине сходится по три грани. Сколько в этом многограннике чёрных граней?

¹На самом деле требование выпуклости здесь является избыточным, вместо неё можно было бы потребовать так называемую *односвязность*, то есть возможность непрерывно стянуть любую замкнутую кривую на поверхности многогранника в точку. Так, например, если мы рассмотрим многогранник с вмятиной, для него по-прежнему будет выполняться формула Эйлера. В общем же случае, например, если в многограннике есть «сквозной туннель», формула Эйлера может быть неверна (проверьте!).