

Все числа в данном листке считаются целыми если не сказано иное.

Основная лемма для алгоритма Евклида: $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - b, b)$.

Следствие основной леммы: Если $a = bq + r$, где $0 \leq r < b$, то $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(r, b)$. Алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя: применяем следствие основной леммы до тех пор, пока одно из чисел не станет равным нулю.

Уравнение $ax + by = c$ имеет решения в целых числах тогда и только тогда, когда c делится на $\text{НОД}(a, b)$.

13.1. Вычислите:

а) $\text{НОД}(1219, 391)$; б) $\text{НОД}(4321, 1234)$; в) $\text{НОД}(\underbrace{1 \dots 1}_n, \underbrace{1 \dots 1}_m)$

г*) $\text{НОД}(x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4, x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 3)$

13.2. Докажите, что следующие дроби несократимы при всех натуральных значениях n :

а) $\frac{2n + 13}{n + 7}$, б) $\frac{2n^2 - 1}{n + 1}$, в) $\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1}$.

13.3. Докажите, что число шагов в алгоритме Евклида может быть сколь угодно большим.

13.4. а) Докажите, что равенство $\text{НОД}(a, mn) = 1$ равносильно выполнению двух условий $\text{НОД}(a, m) = 1$ и $\text{НОД}(a, n) = 1$,

б) Докажите, что если $\text{НОД}(a, b) = 1$, то $\text{НОД}(2a + b, a(a + b)) = 1$.

13.5. Решите в целых числах уравнения (укажите все решения):

а) $45x - 37y = 25$, б) $34x - 21y = 1$, в) $10x + 2y + 18z = 7$,

г) $43x + 13y = 21$.

13.6. Докажите, что если $\text{НОД}(a, b) = 1$, то найдутся такие целые x и y , что $(a + b)x + (a^2 + b^2)y = 2$.

13.7. Докажите, что при $m \neq n$ выполняются равенства

а) $\text{НОД}(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\text{НОД}(m, n)} - 1$,

б) $\text{НОД}(F_n, F_m) = 1$, где $F_k = 2^{2^k} + 1$ — числа Ферма.

13.8. Найдите все взаимно простые a и b , для которых $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2} = \frac{3}{13}$.

Напомним определение последовательности Фибоначчи:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 1, \quad \varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}.$$

13.9. Докажите соотношения:

а) $\text{НОД}(\varphi_{m+n}, \varphi_m) = \text{НОД}(\varphi_m, \varphi_n)$,

Указание. Воспользуйтесь соотношением $\varphi_{m+n} = \varphi_m \varphi_{n-1} + \varphi_{m+1} \varphi_n$ из задачи 5.6.

б) $\text{НОД}(\varphi_n, \varphi_m) = \varphi_{\text{НОД}(n, m)}$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущим пунктом.

13.10. Решите в целых числах уравнение: $\varphi_n x + \varphi_{n-1} y = 1$.