

Эти суммы будут суммироваться в пределах предельных сумм. . .

---

Дмитрий Медведев

**9.1.** Найдите все простые числа  $p, q, r$ , для которых выполнено равенство  $p^q + q^p = r$ .

**9.2.** Для простых чисел  $p$  докажите правило двоичника:

$$(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

**9.3.** Выведите из предыдущего малую теорему Ферма:

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

**9.4.** Докажите, что многочлен с целыми коэффициентами, принимающий в точках 0 и 1 нечётные значения, не имеет целых корней.

**9.5.** Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки?

**9.6.** Докажите, что если сумма цифр у чисел  $N$  и  $2N$  совпадает, то  $N$  делится на 9.

**9.7.** Найдите все такие пары натуральных чисел  $m$  и  $n$ , что  $m^{2019} + n$  делится на  $mn$

**9.8.** Целые числа  $2a^2$  и  $3a$  имеют одинаковые остатки при делении на 18. Какие ненулевые остатки может иметь число  $a > 0$  при делении на 18?

**9.9.** Вася хочет найти все целые числа  $a$  такие, что выражение

$$10n^3 - 3n^5 + 7an$$

делится на 15 для всех целых  $n$ . Какие остатки может давать число  $a$  при делении на 15? Укажите все возможные ответы или докажите, что таких целых чисел  $a$  нет.

Эти суммы будут суммироваться в пределах предельных сумм. . .

---

Дмитрий Медведев

**9.1.** Найдите все простые числа  $p, q, r$ , для которых выполнено равенство  $p^q + q^p = r$ .

**9.2.** Для простых чисел  $p$  докажите правило двоичника:

$$(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

**9.3.** Выведите из предыдущего малую теорему Ферма:

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

**9.4.** Докажите, что многочлен с целыми коэффициентами, принимающий в точках 0 и 1 нечётные значения, не имеет целых корней.

**9.5.** Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки?

**9.6.** Докажите, что если сумма цифр у чисел  $N$  и  $2N$  совпадает, то  $N$  делится на 9.

**9.7.** Найдите все такие пары натуральных чисел  $m$  и  $n$ , что  $m^{2019} + n$  делится на  $mn$

**9.8.** Целые числа  $2a^2$  и  $3a$  имеют одинаковые остатки при делении на 18. Какие ненулевые остатки может иметь число  $a > 0$  при делении на 18?

**9.9.** Вася хочет найти все целые числа  $a$  такие, что выражение

$$10n^3 - 3n^5 + 7an$$

делится на 15 для всех целых  $n$ . Какие остатки может давать число  $a$  при делении на 15? Укажите все возможные ответы или докажите, что таких целых чисел  $a$  нет.