Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Математический кружок

(8 класс)

Составитель: А. Л. Канунников

Москва, 2017

Математический кружок (8 класс). / Универсальная методическая разработка по решению нестандартных задач для элективных курсов в средних общеобразовательных организациях // Сост. А. Л. Канунников. — М.: МГУ, 2017.

Брошюра разработана в рамках совместной программы «Развитие интеллектуальных способностей математически одарённых школьников и повышение качества математического образования» МГУ и Департамента образования города Москвы. В основу брошюры легли задачи, предлагавшиеся на Малом мехмате МГУ, а также на математических кружках при МПГУ.

Содержание

Предисловие

Эта брошюра призвана помочь организовать *математический кружок* для учащихся восьмых классов, однако собранные здесь задачи можно с успехом решать с семиклассниками, а также предлагать (в рамках «ликвидации безграмотности») старшеклассникам, которым не довелось в должное время поучаствовать в математических кружках.

Каждый раздел брошюры соответствует одному занятию кружка и состоит из двух частей — листка с задачами для выдачи ученикам и комментария для преподавателей. Для удобства оригинал-макеты листков также выделены в отдельный файл.

Занятие с использованием листочка обыкновенно проводится примерно **по следующей схеме:**

- *До занятия* руководитель кружка решает сам все задачи и читает предлагаемые решения с комментариями.

- *В начале занятия* каждый школьник получает листок с условиями задач и начинает *самостоятельно* их решать. На первом занятии школьникам нужно объявить: задачи можно решать в любом порядке; как только задача (по мнению школьника) решена, нужно поднять руку и приготовиться обсуждать решение с преподавателем *устно.* Кружок — это не письменная олимпиада. Как правило, **не нужно** в начале занятия «рассказывать теорию»: задачи подобраны так, чтобы решающий сам додумался до ключевых идей листочка. Иногда в начале занятия, до раздачи новых листков, разбираются решения некоторых задач предыдущего занятия.

- *Во время занятия* школьники решают задачи и время от времени пытаются их «сдать» преподавателям. Преподавателей на кружке может быть несколько, если учеников достаточно много. Желательно, чтобы на каждого преподавателя приходилось не более семи школьников. Решения задач обсуждаются *индивидуально* с каждым школьником.

– Если решение **верно,** школьника следует поздравить с решённой задачей и поставить «плюсик» в специальную таблицу (кондуит, или «плюсник»).

– Если решение **неверно,** школьнику предлагается продолжить размышления над задачей. Иногда можно давать небольшие подсказки.

Мы считаем, что **главная цель** математических кружков — приносить школьникам **радость** решения математических задач и через это развивать их смекалку и расширять кругозор. Поэтому мы **категорически не советуем** подменять эту главную цель целями побочными, в частности:

- считаем неприемлемым ставить оценки «за работу на кружках», проводить на кружке контрольные работы и вообще обязывать школьников посещать кружок;

- не советуем объяснять решения всех задач из брошюры (школьник получает больше радости и пользы от собственного, а не от чужого решения);

- не считаем правильным задаваться целью подготовки к определённому виду олимпиад или других соревнований. (В то же время школьники, посещающие математические кружки, в среднем лучше выступают на олимпиадах.)

Мы полагаем, что если участник кружка за занятие самостоятельно решит 2–3 задачи и немного продвинется ещё в 1–2 задачах, то это уже хороший результат. Однако бывает, что задачи оказываются **слишком сложными** для школьников. В этом случае неправильно превращать занятие в разбор всех задач у доски. Вместо этого можно давать подсказки — как индивидуально, так и всем сразу. Представление о том, как подсказывать в конкретных задачах, можно извлечь из комментариев к листкам.

Если всё-таки наши листочки в целом оказались слишком сложными, мы советуем подбирать к каждому занятию аналогичные по тематике более простые задачи. Помните, что приводимая здесь подборка задач призвана *помочь* в организации кружка, но ни в коем случае не загнать его в жёсткие рамки. При выборе задач прежде всего руководствуйтесь **собственным вкусом и силами ваших учеников:** задачи должны нравиться преподавателям, быть интересны и посильны ученикам.

Удачи!

Листок 1. Логика

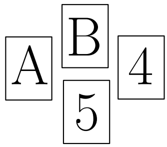
1 В день рождения дяди Фёдора почтальон Печкин хочет выяснить, сколько тому лет. Шарик говорит, что дяде Фёдору больше 11 лет, а кот Матроскин утверждает, что больше 10 лет. Сколько лет дяде Фёдору, если известно, что только один из них прав?

2 Докажите, что произведение двух целых чисел и их суммы всегда чётно.

3 К Холмсу пришли 25 рыцарей и лжецов, но рыцарей было больше. Холмс, зная это, может задать любому вопрос типа: „Кто такой-то: рыцарь или лжец?“. Как Холмсу узнать, кто есть кто, за 24 вопроса? (Рыцари всегда говорят правду, в лжецы всегда врут.)

4 Докажите, что из любых пяти натуральных чисел (не обязательно идущих подряд) можно выбрать три числа, сумма которых делится на три.

5 На столе лежат четыре карточки (см. рисунок справа). На каждой карточке с одной стороны — буква, а с другой — натуральное число. Какие карточки надо перевернуть, чтобы узнать — правда ли, что если на какой-то стороне карточки — чётное число, то на другой стороне — гласная буква?



6 Пятеро рыболовов заметили, что любые двое из них вместе поймали не более 9 рыб. Каким, самое большее, может быть общий улов всех пятерых?

Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ Матроскин сделал *более осторожное* заявление или, выражаясь математически, *более слабое:* если прав Шарик, то тем более прав и Матроскин. Поскольку прав кто-то один, то именно Матроскин, а Шарик неправ. Это значит, что дяде Фёдору ровно 11 лет.

Замечание. Логически более простое рассуждение — разобрать три возможных случая:

1° дяде Фёдору ровно 11 лет;

2° дяде Фёдору больше 11 лет;

3° дяде Фёдору меньше 11 лет.

Условие задачи выполняется только в случае 1° (в случае 2° Шарик и Мароскин оба правы, а в случае 3° — оба неправы).

$\boxed{\mathbf{2}}$ Если одно из чисел чётно, то всё произведение чётно. Если же оба числа нечётны, то их сумма чётна и её произведение с самими числами чётно.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Достаточно выбрать одного человека, назовём его А, и спросить его про каждого из остальных. Если А ответит «Рыцарь» 12 раз или более, то он сказал правду, в противном случае — лжец. В обоих случаях Холмс знает про каждого из 25 человек, кто тот — рыцарь или лжец (судя по ответу А).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Полезно вместо чисел говорить об их остатках при делении на 3. Итак, у нас есть пять карточек, на каждой из которых написано одно из трёх чисел: 0, 1 или 2. Почему сумма чисел на каких-то трёх карточках делится на 3? Первое, что полезно понять, а какие вообще случаи (наборы карточек) нам подходят. Легко видеть, что только такие:

1° на трёх карточках одно и то же число;

2° на трёх карточках все числа разные $(0 + 1 + 2 = 3)$.

Если среди 5 карточек есть все три числа $0, 1, 2$, то выбираем их — случай 2°. Если же это не так, то либо на всех карточках одно и то же чисел, либо разных чисел ровно два и тогда *одно из них встречается как минимум на 3 карточках* — их и берём (это случай 1°).

Замечания. 1. Для доказательства нет необходимости доказывать, что сумма остатков делится на 3 только в ситуациях 1° и 2° (хотя это очевидно: оставшаяся логически возможная ситуация — два одинаковых остатка и третий от них отличающийся — очевидно, не подходит).

2. Мы доказали, что если не имеет места случай 2°, то имеет место случай 1°. Это вообще стандартный способ доказать, что хотя бы один из двух случаев обязательно имеет место. Конечно, можно было рассуждать и наоборот. Именно, если нельзя выбрать три карточки с одним числом, то карточек с нулём не больше двух, карточек с единицей тоже не больше двух, а значит, есть карточка с двойкой; аналогично, есть карточки с нулём и единицей. Короче, если не 1°, то 2°.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Это отличная задача на *импликацию* — так в математике называется утверждение вида $A \Rightarrow B$ (из A следует B). Очень важно, чтобы школьники поняли, когда такое утверждение истинно. Для этого проще понять, когда оно ложно. Рассмотрим это на примере нашей задачи.

«Если на какой-то стороне карточки — чётное число, то на другой — гласная буква.» Для каких карточек это неправда? Очевидно, в точности для карточек с чётным числом и согласной буквой. Теперь ясно, что переворачивать надо **карточки с буквой В и с числом 4.**

Обратите внимание, что при переходе к отрицанию утверждения в импликации превращаются в равноправные. На научном языке это записывается так: $\rceil(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \rceil B$. Однако не стоит увлекаться логической символикой с неподготовленными школьниками. Суть можно объяснить, пользуясь обычным языком.

Из A <u>не</u> следует B тогда и только тогда, когда A верно, а B неверно. В частности, из ложного утверждения следует любое, и из любого утверждения следует истинное.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Понятно, что 5 рыб мог поймать максимум один рыболов, причём тогда остальные поймали максимум по 4 рыбы. Вариант 5, 4, 4, 4, 4 удовлетворяет условию, и в нём весь улов — 21 рыба. Может ли быть больше? *Понять,* что нет, нетрудно, сложнее — *доказать*. Вам наверняка будут сдавать примерно такие доказательства: «Если самый удачливый рыболов (кто поймал больше всех) поймал 6 рыб, то остальные — по 3, если 7, то остальные — по 2, если 8, то — по 1, а если 9, то — ни одной.» По большому счёту это правильно, но надо внести кое-какие исправления и добавления. Во-первых, не «остальные — по 3», а «остальные — не более чем по три». Понятно, мы ищем максимум, но точность формулировок никто не отменял. Во-вторых, надо не забыть случай, когда самый удачливый поймал не более 4 рыб. Тогда остальные — тоже, а значит, весь улов — не более 20 рыб.

Вот теперь это — полное решение. Но как быть, если любые двое поймали не более $2n+1$ рыб ($n = 0, 1, 2, \ldots$)? Как доказать, что максимум будет в варианте $n+1, n, n, n, n$ (и равен $5n+1$)? В принципе 8-классники уже достаточно взрослые, чтобы воспринять такое решение. Пусть i-й рыболов поймал a_i рыб, причём $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_5$. Тогда $a_2 \leqslant n$ (иначе $a_1 \geqslant a_2 \geqslant n+1$ и $a_1 + a_2 \geqslant 2n+2$ — противоречие). Пусть $a_2 = n - \delta$. Тогда $a_1 \leqslant n + 1 + \delta$ и

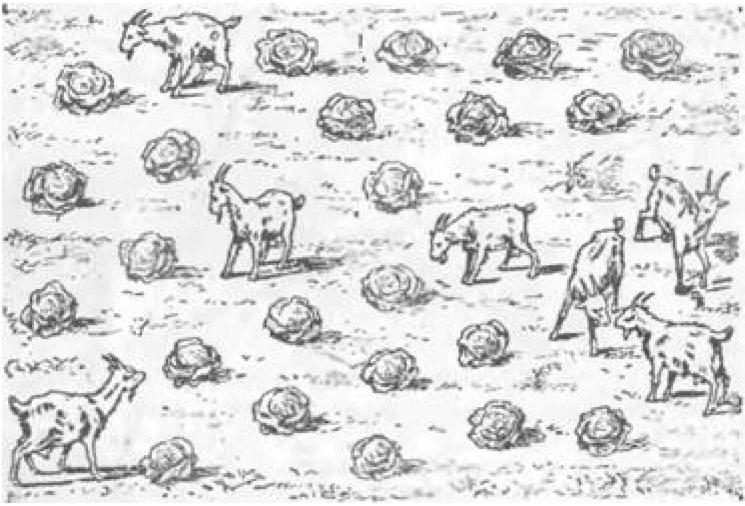
$$a_1 + \ldots + a_5 \leqslant (n + 1 - \delta) + 4(n - \delta) = 5n + 1 - 3\delta \leqslant 5n + 1.$$

Отметим, что если любые двое поймали не более $2n$ рыб, то всё гораздо проще. Предложите школьникам подумать самостоятельно. Можете также предложить другие варицаии и обобщения, особенно, сильным школьникам: пусть *любые трое* поймали не более 9 рыб (10, 11 рыб) и т. п.

Листок 2. Козы

Это занятие посвящено козам. Они прожорливы и съедают всё, до чего могут дотянуться. Поэтому коз держат на привязи.

1 Тремя прямыми линиями отделите коз от капусты.



2 На лугу между двумя колышками натянем верёвку. У второй верёвки один конец привяжем к ошейнику козы, а на другом сделаем петлю, скользящую по первой верёвке. Какой участок выест коза?

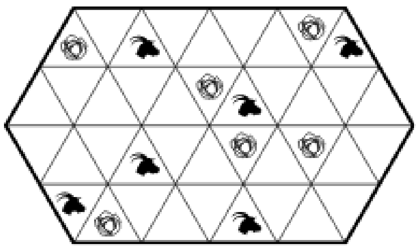
3 Математик прогуливался по лугу, держа козу на поводке длиной 1 м. Математик обошёл по периметру прямоугольник 5 м $\times$ 3 м. Нарисуйте участок, на котором могла побывать при этом коза, не обрывая поводка.

$\boxed{4}$ С помощью колышков и верёвок удержите козу в **а)** полукруге; **б)** прямоугольнике; **в)** треугольнике.

$\boxed{5}$ Забор имеет вид треугольника. Внутри к серединам двух сторон привязали верёвкой по козе; длина каждой верёвки равна половине длины стороны, к которой она привязана. Могут ли козы съесть всю траву внутри забора?

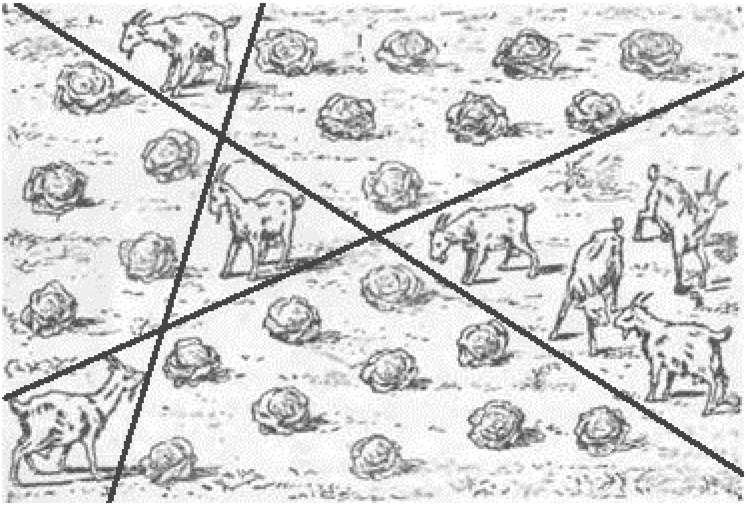
$\boxed{6}$ В узлах клетчатой бумаги живут садовники, а вокруг них повсюду растут цветы. За каждым цветком должны ухаживать три ближайших к нему садовника. Один из садовников хочет узнать, за каким участком он должен ухаживать. Нарисуйте этот участок.

$\boxed{7}$ Фермер огородил снаружи участок земли и разделил его на треугольники со стороной 50 м. В некоторых треугольниках он высадил капусту, а в некоторые пустил пастись коз. Помогите фермеру построить по линиям сетки дополнительные заборы как можно меньшей общей длины, чтобы защитить всю капусту от коз, и докажите, что меньшей длиной обойтись нельзя.

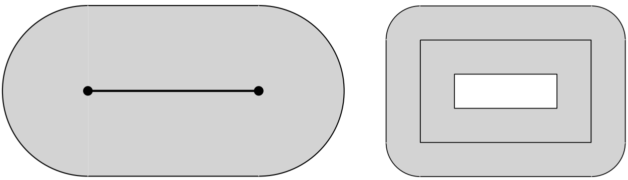


Ответы и комментарии

$\boxed{1}$ Это старинная детская задача для разминки. Ответ на рисунке.



$\boxed{2}$ См. рисунок слева.



$\boxed{3}$ См. рисунок справа. Не забудьте про внутренний прямоугольник 3×1, до которого коза не дотянется.

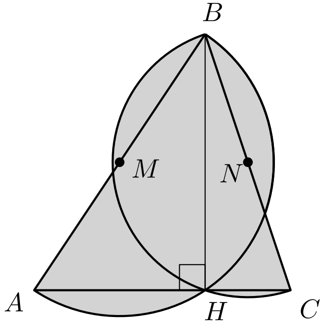
$\boxed{4}$ Общий принцип: умея удерживать козу в каждой из нескольких областей по отдельности, мы её удержим и в их пересечении. Далее легко удержать козу в круге: в его центре вбиваем колышек и привязываем к нему верёвкой козу. А используя конструкцию из задачи 2, удержим козу в области с двумя параллельными границами.

а) Полукруг — это пересечение круга и полуплоскости.

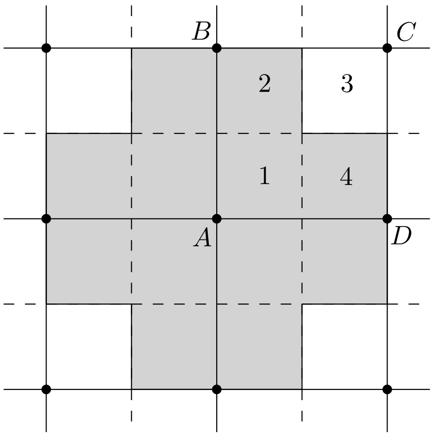
б) Прямоугольник — пересечение двух полос.

в) Треугольник — пересечение трёх полуплоскостей. (Аналогично можно удержать козу в любом *выпуклом* многоугольнике.)

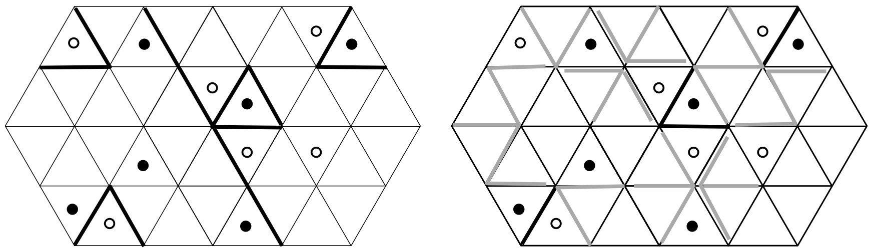
$\boxed{5}$ Опустим высоту BH в данном треугольнике ABC (см. рисунок). Поскольку $MA = MB = MH$ и $NC = NB = NH$, то коза, привязанная к M, заведомо съест траву в прямоугольном треугольнике ABH, а коза, привязанная к N, — в треугольнике CBH. Поэтому вместе козы съедят всю траву внутри треугольника ABC.



$\boxed{6}$ Разделим одну из клеток $ABCD$ на четыре квадратика $1, 2, 3, 4$ (см. рис.). Очевидно, для всех цветов квадрата 1 ближайшими являются садовники A, B и D — они и должны поливать эти цветы. В виду симметрии, получаем область, которую должен поливать садовник A — она выделена серым цветом.



$\boxed{7}$ Пример с 13-ю перегородками (с суммарной длиной 650 м) показан на рисунке слева. Как доказать минимальность? Посмотрим на рисунок справа. Чёрным выделены перегородки, которые точно надо построить, их 4. Ещё на линиях сетки нарисованы 9 серых связных фигур — в каждой из них точно должна быть перегородка (если в какой-то фигуре нет перегородок, то какой-то козе откроется путь к какой-то капусте).



Сразу проверяйте пример школьника по двум показателям:

1) выполнено ли условие, т. е. отделены ли все козы от капусты;

2) нельзя ли убрать какую-то, заведомо лишнюю, перегородку.

Если школьник ошибся в одном из этих пунктов (или даже в обоих), укажите ему на это. Иначе — обязательно требуйте строгое доказательство минимальности, причём не доверяйте фразам типа „лучше всего поставить перегородку вот здесь“. Если вам сдают ответ «14 перегородок» (т. е. 700 м) или более, не спешите заявлять, что он не оптимален — пусть школьник сам докажет оптимальность.

Листок 3. Принцип Дирихле

1 В кинотеатре 7 рядов по 10 мест в каждом. Группа из 50 детей сходила на утренний сеанс, а потом на вечерний. Докажите, что найдутся двое детей, которые на утреннем сеансе сидели в одном ряду и на вечернем сеансе тоже сидели в одном ряду.

2 Докажите, что из 52 целых чисел всегда найдутся два, разность квадратов которых делится на 100.

3 На клетчатой бумаге отмечено 5 узлов (точек пересечения линий сетки). Докажите, что среди них есть два, середина отрезка между которыми тоже попадает в узел.

4 *Сейчас вылетит птичка.* В фотоателье залетели 20 птиц — 8 скворцов, 7 трясогузок и 5 дятлов. Каждый раз, как только фотограф щёлкнет затвором фотоаппарата, какая-то одна из птичек улетит (насовсем). Сколько кадров сможет сделать фотограф, чтобы быть уверенным: у него останется не меньше пяти птиц одного вида, и не меньше трёх — другого?

5 Первоклассник Петя знает только одну цифру 1. Докажите, что он может написать число, кратное 1234567. (Петя может только выписывать подряд единицы.)

6 Убирая детскую комнату к приходу гостей, мама нашла 9 носков. Среди любых четырёх носков хотя бы два принадлежали одному ребёнку, а среди любых пяти носков не более трёх имели одного хозяина. Сколько могло быть детей и сколько носков могло принадлежать каждому ребёнку, если у каждого был хотя бы один носок?

7 Дорога протяжённостью 1 км полностью освещена фонарями, причём каждый фонарь освещает отрезок дороги длиной 1 м и после выключения любого фонаря дорога освещена уже не полностью. Какое наибольшее число фонарей может быть на дороге?

8 В квадратном ковре со стороной 10 м моль проела 80 дырок (дырки считаются точечными). Докажите, что из него можно вырезать коврик стороной 1 м, не содержащий внутри себя ни одной дырки. Дырки **а)** могут; **б)** не могут находиться на границе вырезаемого коврика.

Ответы и комментарии

Этот листок не для начинающих. Предполагается, что школьники раньше уже решали простые задачи на принцип Дирихле. Тем не менее, перед занятием полезно его напомнить в следующей форме: *если в n клетках сидит более nq кроликов, то хотя бы в одной клетке сидит не менее $n+1$ кроликов.* Обязательно проговорите со школьниками доказательство этого утверждения (от противного).

$\boxed{\mathbf{1}}$ Поскольку $50 = 7 \cdot 7 + 1$, то найдутся 8 детей, сидевших утром в одном ряду. Хотя бы двое из них сидели в одном ряду вечером.

Понятно, что для 49 детей утверждение задачи неверно: могло случиться так, что утром дети сели в виде квадрата 7×7, а вечером этот квадрат повернулся на 90° (дети, сидевшие утром в одном горизонтальном ряду, вечером сидят друг за другом).

Хороший дополнительный вопрос. Пусть было три сеанса (ещё дневной). Сколько самое меньшее должно быть детей, чтобы можно было гарантировать, что найдутся двое, которые и утром, и днём, и вечером сидели в одном ряду? (Ответ: $7 \cdot 49 + 1 = 344$.)

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ заведомо делится на 100, если $a-b$ или $a+b$ делится на 100. Рассмотрим 51 «клетку»: $0, 1, 2, \ldots, 50$. Посадим «кролика» (целое число) a в клетку с номером k, если a или $-a$ даёт остаток k при делении на 100. Из данных 52 чисел обязательно найдутся два a и b из одной клетки. Они удовлетворяют требованию задачи.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Можно считать, что узлы — это в точности пары целых чисел. Середина отрезка с концами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — точка $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Её координаты целочисленны в точности тогда, когда x_1, x_2 одной чётности и y_1, y_2 одной чётности. Среди пяти чисел $x_1, \ldots, x_5$ (среди которых могут быть равные) хотя бы три имеют одну чётность, пусть это x_i, x_j, x_k. Далее из чисел y_i, y_j, y_k хотя бы два имеют одну чётность. Задача решена.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Когда птиц каждого вида останется меньше 5? Тогда и только тогда, когда улетят хотя бы 4 скворца, 3 трясогузки и 1 дятел. Такое может случиться после $4+3+1 = 8$ выстрелов. А если выстрелить 7 раз, то птиц какого-то вида будет как минимум 5, скажем, вида А.

Самое трудное — доказать (без лишнего перебора), что птиц какого-то другого вида останется хотя бы 3. Всего осталось 13 птиц, из них максимум 8 птиц вида А. Значит, не менее 5 птиц двух друих видов в сумме. Из них птиц одного вида не менее 3 (если бы было не более 2 каждого из двух видов, то в сумме было бы не более 4).

$\boxed{\mathbf{5}}$ Рассмотрим числа $1, 11, 111, \ldots, \underbrace{1\ldots1}_{1234568}$. Какие-то два из них дают один остаток при делении на 1001, поэтому их разность кратна 1001. Но их разность имеет $1\ldots10\ldots0$. Отбрасывая нули, получаем число из одних единиц, кратное 1234567.

Отбрасывание нулей объясняется взаимной простотой любой степени десятки и числа 1234567 (не кратного ни 2, ни 5). Очевидно, вместо 1234567 можно взять любое число с тем же свойством. Школьник вправе пользоваться однозначностью разложения на простые.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Если бы детей было больше трёх, то можно было бы взять 4 носка, принадлежащих разным детям, и получить противоречие с тем, что среди любых четырёх носков хотя бы два принадлежат одному ребёнку. Итак, детей максимум трое. С другой стороны, каждому ребёнку принадлежит не более трёх носков (иначе можно было бы взять пять носков, из которых более трёх принадлежат одному хозяину), а так как всего носков 9, то детей не более трёх. Итак, детей ровно трое и каждому принадлежат ровно три носка.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Фонари с нечётными номерами освещают непересекающиеся участки дороги (если это не так, скажем, для первого и третьего фонарей, то второй фонарь можно выключить, что противоречит условию), поэтому их меньше 1000, т. е. последний имеет номер максимум 1997. С другой стороны, 1997 фонарей могло быть: допустим, каждый фонарь освещает по полметра слева и справа от себя, 1-й и 1997-й фонари стоят на расстоянии полметра от концов дороги, а остальные фонари стоят между ними равномерно, на расстоянии $\frac{999}{1997}$ м друг от друга. Тогда расстояние между фонарями, стоящим через один, равно $\frac{1998}{1997} > 1$, поэтому никакие фонари нельзя отключить.

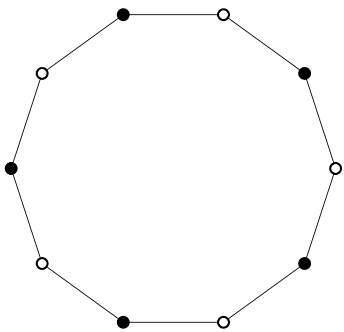
$\boxed{\mathbf{8}}$ Если разрезать ковёр на сто квадраов 1×1, то по принципу Дирихле найдётся квадрат, не содержащий *строго внутри себя* дырок, и даже найдётся 20 таких квадратов. Это подходит для пункта **а)**.

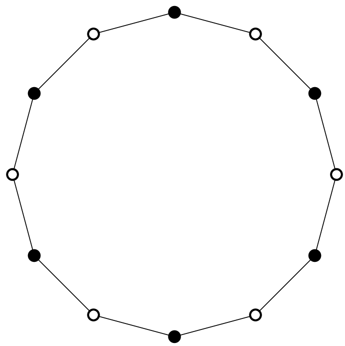
В пункте **б)** рассуждение тоньше: разделим ковёр на 81 квадрат со стороной 10/9 метров. Опять-таки найдётся квадрат без дырок внутри. Из него уже можно вырезать коврик 1×1 без дырок даже на границе.

Листок 4. Что наша жизнь? Игра!

$\boxed{1}$ **а)** Вершины правильного 10-угольника закрашены чёрной и белой краской через одну. Двое играют в следующую игру. Каждый по очереди соединяет отрезком вершины одинакового цвета, причём эти отрезки не должны иметь общих точек (даже концов) с проведёнными ранее. Побеждает тот, кто сделал последний ход. Кто выигрывает при правильной игре?

б) Та же задача для 12-угольника.





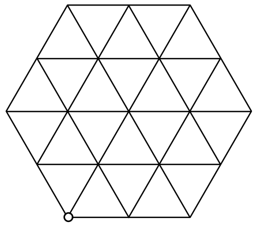
$\boxed{2}$ Кай и Снежная Королева играют в такую игру: они по очереди переводят остановившиеся часы на два или на три часа вперёд. Тот, кто поставит часовую стрелку на 12, выигрывает. Сейчас ходит Кай, а на часах шесть ровно. Сможет ли кто-нибудь из игроков обеспечить себе победу, и как для этого нужно играть?

$\boxed{3}$ **а)** На шахматной доске стоит ферзь. Игроки по очереди двигают его по обычному правилу, при этом ходить влево и вниз запрещается. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. При каких начальных позициях у первого игрока есть выигрышная стратегия?

б) Та же задача про коня.

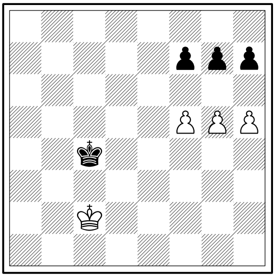
$\boxed{4}$ *Игра Витхоффа.* Имеется две кучки: в одной 8 камней, в другой 9. Двое ходят по очереди. Каждый может либо взять несколько камней из одной кучки (возможно, все, возможно, один), либо взять по одинаковому числу камней из обеих кучек. Выигрывает взявший последний камень. У кого из игроков есть выигрышная стратегия и в чём она заключается?

5 В одном из узлов шестиугольника, разбитого на правильные треугольники, стоит фишка (см. рисунок). Два игрока по очереди передвигают её в один из соседних узлов, причём запрещается ходить в узел, в котором фишка уже побывала. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

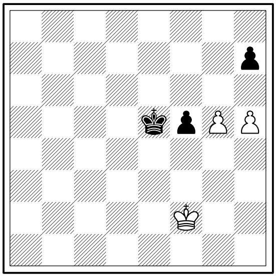


6 *Любителям шахмат.* В следующих шахматных позициях — ход белых. Смогут ли они выиграть?

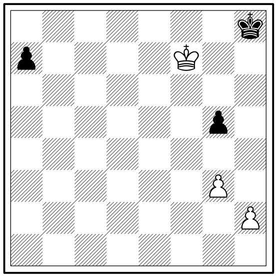
а)



б)



в)



Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ Эта задача — на симметричную стратегию.

а) Второму игроку для победы достаточно проводить отрезок, симметричный относительно центра отрезку, проведённому первым игроком последним ходом. Второй при этом всегда может сделать ответный ход, а у первого ходы рано или поздно закончатся.

б) Здесь побеждает первый, проведя сначала отрезок через центр (диаметр описанной окружности), а затем отвечая на ходы второго симметрично относительно этого отрезка.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Что лежит на поверхности? Очевидно, первым ходом Кай должен пойти в 8 (а не в 9), после чего Снежная Королева пойдёт в 11 (а не в 10). Но вот дальше разбирать все варианты ужасно не хочется, а в случае циферблата, скажем, из 100 делений было бы не под силу. Как же быть?

Такие игры надо исследовать с конца, последовательно определяя выигрышные и проигрышные позиции. В этой игре 9 и 10 — выигрышные позиции, т. к. из них можно за один ход попасть в 12, сразу выиграв. Пометим их буквой В на циферблате. Далее позиция 7 проигрышная, т. к. любой ход из неё ведёт в выигрышную (для соперника) позицию, пометим 7 буквой П. Из 4 и 5 мы можем попасть в 7, т. е. загнать соперника в проигрышную позицию. Отсюда 2 — проигрышная, а тогда 10 и 11 — выигрышные. Казалось бы, 9 должна быть проигрышной, но она уже выигрышная. Как видим, из 8 мы можем попасть только в выигрышные позиции, поэтому 8 проигрышная, значит, 6 — выигрышная. Итак, **выигрывает Кай**; каждым ходом ему надо загонять Снежную Королеву в проигрышную позицию.

Вот общий принцип: **если из позиции мы можем попасть в проигрышную позицию, то это — выигрышная позиция; если же любой ход из позиции ведёт в выигрышную позицию, то это — проигрышная позиция.**

$\boxed{\mathbf{3}}$ Расставляем буквы В и П в клетках доски последовательно в соответствии с общим принципом. Например, в пункте а) первым делом ставим П в угол, затем ставим В на все поля, из которых можно попасть в этот угол и т. д. В пункте б) ставим букву П на вертикаль h, на восьмую горизонталь, а также на поле g7.

а)

В	В	В	В	В	В	В	П
В	В	В	В	В	П	В	В
В	В	В	П	В	В	П	В
В	П	В	В	П	В	В	В
В	В	В	В	В	В	В	В
В	В	В	П	В	В	В	В
В	В	В	В	В	В	В	В
В	В	В	В	В	В	В	В

б)

П	П	П	П	П	П	П	П
В	В	В	В	В	В	П	П
В	В	В	В	В	В	В	П
П	П	П	П	П	В	В	П
В	В	В	П	П	В	В	П
В	В	В	В	П	В	В	П
П	П	В	В	П	В	В	П
П	П	В	В	П	В	В	П

$\boxed{\mathbf{4}}$ Позиции в игре Витхоффа — пары целых неотрицательных чисел — чисел камней в кучках. Ясно, что пары вида $(n, 0)$, $(0, n)$, (n, n), где $n > 0$, выигрышные. Следовательно, позиция $(1, 2)$ проигрышная. В неё можно попасть из позиции $(8, 9)$ (и вообще из любой позиции $(n, n + 1)$ с $n > 1$), взяв 7 камней. Это и есть выигрывающий ход для первого игрока.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Разобьём все узлы, кроме того, где стоит фишка, на пары соседних произвольным образом (см. рисунок). Как только первый ходит в какой-то узел, второй ходит в соседний с ним узел в паре. Это — выигрывающая стратегия для второго игрока.

Важно отметить, что недостаточно просто сказать, что всего узлов нечётное число, а значит, ходы закончатся у первого. Ведь фишка может зайти в тупик, вообще не попав в какие-то узлы. Предложенная стратегия второго игрока как раз не допускает этого.

$\boxed{\mathbf{6}}$ **а)** Казалось бы, чёрный король ближе к пешкам, и белые едва ли могут спастись. Однако они выигрывают, осуществляя прорыв **1. g6!** и на взятие **1... fg** отвечая **2. h6!** (в случае 1... hg аналогично 2. f6, а иначе белые берут сами и проводят пешку в ферзи). Во всех случаях белая пешка проскакивает в ферзи, и белые побеждают.

Позиции в пунктах **б)** и **в)** также допускают строго математическое решение, причём его можно проверить по таблицам Налимова: компьютер просчитал все позиции с шестью (и даже с семью) фигурами.

б) Выигрывает только **1. h6!** и на любой ответ чёрных — **2. g6**.

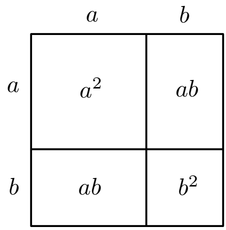
в) К победе ведёт только **1. g4!** Если **1... a5**, то **2. h4** и пешка g проходит в ферзи матуя. Единственный способ этому воспрепятствовать: **1... Крh7 2. h4 Крh6**, но тогда **3. Крf6 Крh7 4. h5**, создавая защищённую проходную и успевая задержать пешку a. Чёрный король должен оставаться в квадрате пешки h, но белый король его без труда оттесняет, добираясь до пешки g5. Например, при королях на c5 и e5 белые ходят Крc4 и чёрные не могут пойти Крe4, поэтому следующим ходом белый король попадает на вертикаль d. Дальнейшее просто.

А вот после **1. h4??** чёрные делают ничью: **1... g4** (не **1... gh??** из-за **2. g4** с победой белых). Позиция отличается от рассмотренной в предыдущем абзаце тем, что треугольник из пешек сдвинут на ряд ниже. Соответственно квадрат чёрного короля шире, и ему удаётся, оставаясь в нём, не подпускать белого короля (уже съевшего пешку a) при помощи полей соответствия:

Белый король	c8	c7	c6	c5	c4	c3	d3	e3
Чёрный король	e8	e7	e6	e5	e4	e5	d5	e5

В этой таблице указано, где должен находиться чёрный король при ходе белых с указанного поля. Как видим, чёрный король создаёт непреодолимый барьер на пути у белого короля. Если в какой-то момент белые пойдут пешкой h, то чёрный король успеет её съесть и встать на поле g6 при взятии белым королём пешки g4, добиваясь простой теоретически ничейной позиции.

Листок 5. Геометрия преображает алгебру



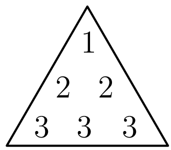
Французский писатель Жан Жак Руссо не мог поверить в формулу

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

пока не нарисовал картинку.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Попробуйте геометрически вывести формулы для сумм:
а) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$; **б)** $1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Расположите в правильном треугольнике со стороной n одну единицу, две двойки, три тройки и т. д. Случай $n = 3$ см. на рисунке. Рассмотрите ещё два треугольника, полученных из данного поворотом на 120° в обоих направлениях. Глядя на полученные три треугольника, выведите формулу для *суммы квадратов*



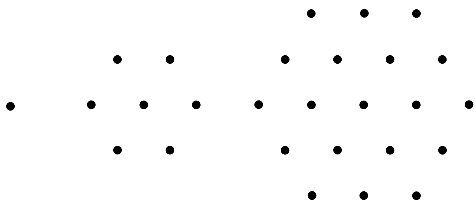
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Докажите удивительное равенство

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

геометрически, для чего попробуйте расположить в квадрате со стороной $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ один квадрат 1×1, два квадрата 2×2, $\ldots$, n квадратов $n \times n$. (Не отчаивайтесь, если квадраты не удаётся расположить без пустот и наложений.)

$\boxed{\mathbf{4}}$ Сколько точек на всех ста гексах:



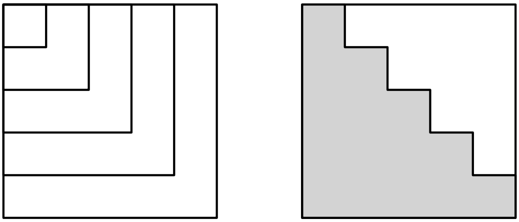
1) 2) 3)

$\boxed{\mathbf{5}}$ Выведите из решения предыдущей задачи формулу для суммы квадратов ещё одним способом.

Ответы и комментарии

Этот листок отличается по стилю и назначению от традиционных листков. Главное отличие в том, что школьникам вместе с задачей предлагается, вопреки обыкновению, и метод решения. Сделано это затем, чтобы школьники сами пришли к красивым доказательствам классических формул. Стоит, однако, отметить (и сообщить школьникам заранее), что они могут решать задачи любым способом, каким захотят.

$\boxed{\mathbf{1}}$ а) n^2; б) $\frac{n(n+1)}{2}$. Ответы следуют из картинок:



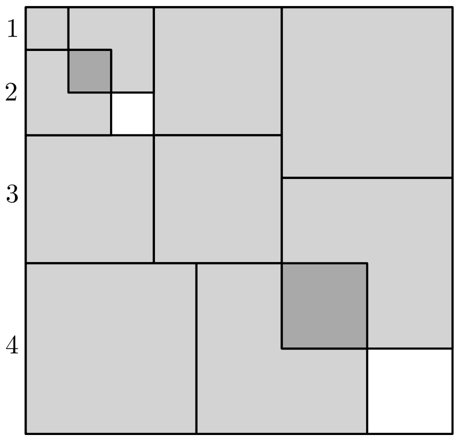
Отметьте, что каждую сумму можно сосчитать, выписав её в обратном порядке. Так поступил семилетний Гаусс.

$\boxed{\mathbf{2}}$ На просторах Интернета можно найти вот такую картинку:

В каждом треугольнике расположены одна единица, две двойки, три тройки и т. д. — всего как раз $1^2+2^2+\ldots+n^2$. Треугольники не зря повёрнуты друг относительно друга: если в каждом треугольнике взять ячейку в одном и том же месте, то сумма трёх чисел в этих ячейках всегда будет одна и та же, а именно, $2n+1$. (Если школьник до этого догадался, он уже молодец и заслуживает похвалы, ну а если ещё смог аккуратно доказать, то большой молодец.) Можно, например, объяснить это так. Для ячеек на левой стороне это видно, а при движении от любой из них по горизонтали числа в первом треугольнике не меняются, во втором — увеличиваются на 1, в третьем — уменьшаются на 1.

Остаётся найденную сумму $2n + 1$ взять $\frac{n(n+1)}{2}$ раз (именно столько ячеек в треугольнике: $1 + 2 + \ldots + n$) и не забыть поделить на 3.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Попробуем располагать квадраты в виде уголков, см. рисунок:



Как видим, квадраты нечётных размеров аккурат помещаются, а с квадратами чётных размеров возникают некоторые проблемы: во-первых, они накладываются друг на друга, а во-вторых, остаются пустоты. Но легко видеть, что наложения и пустоты компенсируют друг друга!

$\boxed{\mathbf{4}}$ Эта задача, а точнее её геометрическое решение, не оставит никого равнодушным! Прежде всего сосчитаем число точек на первых двух, трёх, четырёх гексах: $8, 27, 64$. Это же полные кубы! Логично предположить, что на первых n гексах будет n^3 точек. Как бы это доказать?

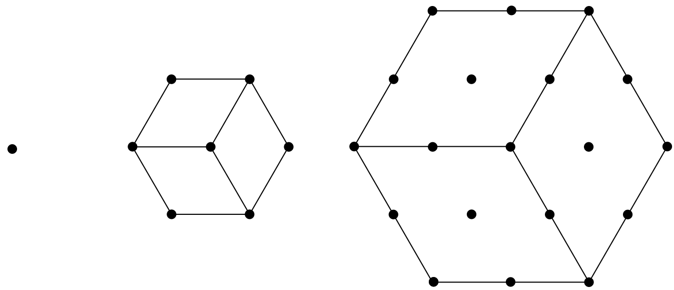
Алгебраический способ. Равносильное утверждение: *на n-м гексе $n^3 - (n-1)^3$ точек.* Преобразуем:

$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1. \tag{1}$$

И впрямь, разобьём n-й гекс на слои: в центре одна точка, вокруг неё — 6, дальше — $6 \cdot 2$, затем $6 \cdot 3$ и т. д. На внешнем слое $6(n-1)$ точек, итого

$$1+6(1+2+\ldots+n-1)=1+6 \cdot \frac{n(n-1)}{2}=3n^2-3n+1.$$

Геометрический способ. Посмотрите, как уголки в пункте а) первой задачи аккуратно сложились в квадрат. Здесь ситуация похожая, но требуется фантазия. Взгляните на гексы. Видите ли вы в них кубы? Ну конечно! Вот же они:



Точнее, это *видимые части поверхностей кубов,* которые, если вложить друг в друга, сложатся в куб $n \times n \times n$! Вот такая красота!

$\boxed{\mathbf{5}}$ Подставим в равенство (1) вместо n каждое из чисел от 1 до n:

$$\begin{gathered}
1^3-0^3=3 \cdot 1^2-3 \cdot 1+1, \\
2^3-1^3=3 \cdot 2^2-3 \cdot 2+1, \\
3^3-2^3=3 \cdot 3^2-3 \cdot 3+1, \\
\ldots \\
n^3-(n-1)^3=3 \cdot n^2-3 \cdot n+1.
\end{gathered}$$

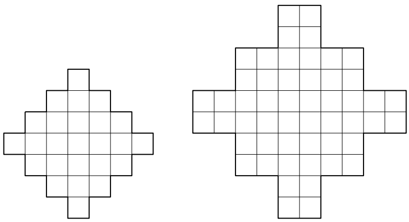
Сложим все равенства: в левой части останется n^3-1^3, а в правой — утроенная искомая сумма квадратов плюс утроенная сумма $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ плюс сумма n единиц. Отсюда после преобразований получаем требуемую формулу.

Листок 6.

1 В городе каждый седьмой математик — философ, а каждый девятый философ — математик. Сколько математиков в городе не являются философами, если 360 философов не являются математиками?

2 Разрежьте произвольный остроугольный треугольник на три трапеции.

3 Какое наибольшее число ладей можно поставить а) на левую доску; б) на правую доску так, чтобы никакие две из них не били друг друга?



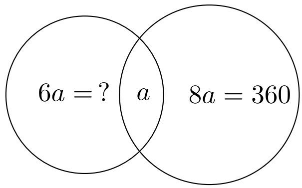
4 Маша и Паша, поссорившись, пошли в противоположные стороны с равными скоростями. Через три минуты Паша решил помириться и стал догонять Машу, увеличив скорость в три раза. Через какое время он догонит Машу, считая с того момента, как решил помириться?

5 Квадрат 2017×2017 разрезали по линиям сетки на несколько прямоугольников. Докажите, что периметр хотя бы одного из этих прямоугольников делится на 4.

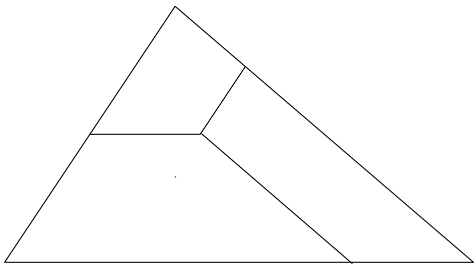
6 Длина взрослого червяка 1 метр. Если червяк взрослый, его можно разрезать на две части в любом отношении длин. При этом получаются два новых червяка, которые сразу начинают расти со скоростью 1 метр в час каждый. Когда длина червяка достигает метра, он становится взрослым и прекращает расти. Можно ли из одного взрослого червяка получить 10 взрослых червяков быстрее чем за час?

Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ Нарисуем *круги Эйлера* и обозначим число математиков-философов через a (пересечение). По первому предложению условия это — седьмая часть всех математиков и девятая часть всех философов. Так на нашей диаграмме появляются числа $6a$ и $8a$. Первое из них надо найти, а второе дано и равно 360. Итак, $8a = 360$, откуда $6a = \frac{3}{4} \cdot 360 = 270$.

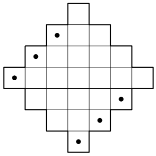
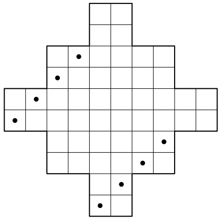


$\boxed{\mathbf{2}}$ Берём внутри треугольника любую точку и проводим из неё три отрезка, параллельные сторонам треугольника, см. рисунок.



$\boxed{\mathbf{3}}$ **а)** На этой доске 7 вертикалей (включая крайние клетки), в каждой может быть не более одной ладьи, значит, всего ладей не более 7. Если их 7, то в каждой вертикали стоит по ладье, в частности, в двух крайних клетках стоят ладьи. Но эти клетки на одной горизонтали. Значит, такого быть не может, и ладей меньше 7. На рисунке слева показано, как расставить 6 ладей.

б) В двух квадратах 2×2 слева и справа в общей сложности может стоят не более двух ладей (всего две горизонтали). Оставшаяся часть доски состоит из 6 вертикалей, так что на ней может быть не более 6 ладей. Итого максимум 8 ладей. Пример — на рисунке справа.

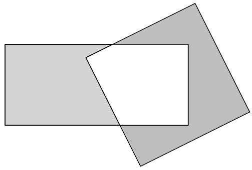
 

$\boxed{4}$ Пусть v — первоначальная скорость Маши и Паши. Тогда они расходились со скоростью $v + v$, а сближались со скоростью $3v - v$, т. е. с той же. Поэтому они встретятся через 3 минуты.

$\boxed{5}$ Периметр прямоугольника $a \times b$ равен $2(a + b)$, что при целых a и b делится на 4, если и только если a и b имеют одинаковую чётность. Далее a и b нечётны, если и только если площадь ab нечётная. Но прямоугольник с нечётной площадью обязательно найдётся, ведь если бы площади всех прямоугольников, составляющих квадрат 2017×2017, были чётными, то чётной была бы и их сумма, равная 2017^2.

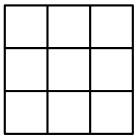
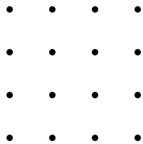
$\boxed{6}$ Рассмотрим предельный случай, когда от червяка отделяется нулевая часть и вырастает до метра ровно за час. Случай, близкий к предельному: отделим от червяка совсем чуть-чуть, ε м. Насколько мало должно быть ε, определим позже. Эта маленькая часть станет взрослым чуть меньше чем за час, и мы его уже трогать не будем. Большая часть $1 - \varepsilon$ м вырастет до метра за ε ч, после чего мы отрежем от него уже 2ε м. За $1 - 2\varepsilon$ ч эта часть вырастет до метра, при этом от начала эксперимента пройдёт $\varepsilon + 1 - 2\varepsilon$ ч. Дальше аналогично будем отрезать от вновь выросшего взрослого червяка 4ε м, 8ε м, 16ε м и т. д. Чтобы успеть вырастить 10 взрослых червяков меньше чем за час, необходимо и достаточно выполнение неравенства. $\varepsilon(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^8) < 1$. Аналогично можно вырастить любое число n взрослых червяков.

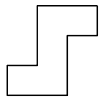
Листок 7. Семь раз отмерь — один раз отрежь



$\boxed{\mathbf{1}}$ Прямоугольник со сторонами 4 см и 9 см произвольно наложили на квадрат со стороной 6 см, как показано на рисунке слева. Сравните площади закрашенных частей прямоугольника и квадрата.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Сколько квадратов **а)** изображено на рисунке слева; **б)** можно изобразить с вершинами в точках на рисунке справа?



$\boxed{\mathbf{3}}$ Разрежьте фигуру на рисунке справа на несколько частей и составьте из них квадрат.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нарисуйте на клетчатой бумаге квадрат площадью **а)** две клетки; **б)** пять клеток.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Сравните площади треугольников со сторонами $5, 5, 6$ и $5, 5, 8$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Семиклассник Сёма придумал новый признак равенства треугольников — по двум сторонам и углу *не* между ними. Прав ли Сёма?

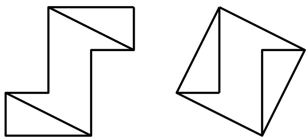
Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ Квадрат и прямоугольник имеют равные площади (по 36 см^2), поэтому после вычитания их общей части, площади оставшихся (закрашенных) частей будут **равны**.

$\boxed{\mathbf{2}}$ а) Квадратов со стороной 1 клетка — 9, со стороной 2 клетки — 4, со стороной 3 клетки — 1. Всего — 14.

б) К квадратам из пункта а) добавляются 4 квадрата со стороной $\sqrt{2}$ и 2 квадрата со стороной $\sqrt{5}$. Итого — 20. Доказать, что других квадратов нет, легко: достаточно для любой пары точек построить два квадрата с двумя такими смежными вершинами и учитывать только квадраты, для которых две другие вершины будут среди отмеченных. Перебор сокращается с помощью соображений симметрии.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Площадь такого квадрата должна быть 5 клеток. Такой квадрат мы видели в пункте **б)** предыдущей задачи. Вот ответ:



$\boxed{\mathbf{4}}$ См. пункт б) задачи 2.

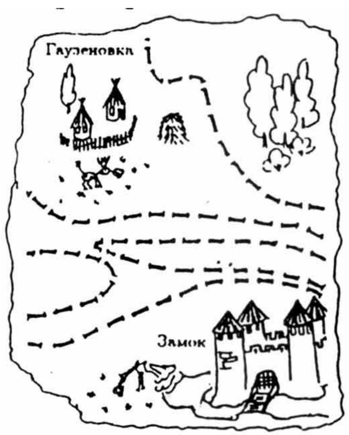
$\boxed{\mathbf{5}}$ Проведём в обоих треугольниках высоту к основанию и увидим, что каждый составлен из двух египетских треугольников со сторонами $3, 4, 5$. Значит, площади равны.

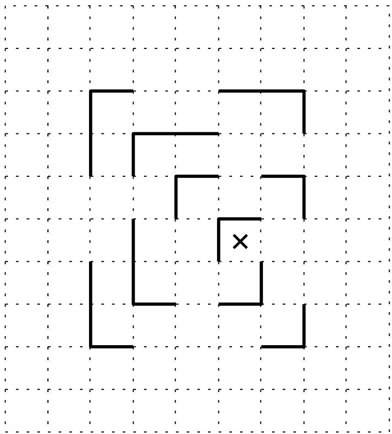
$\boxed{\mathbf{6}}$ Нет, это неверно. Контрпример строится так: на основании AC равнобеденного треугольника ABC берём точку K, отличную от середины. Треугольники ABK и CBK удовлетворяют условию «признака», но не равны.

На самом деле, верна альтернатива: треугольники из признака Сёмы либо равны, либо из них составляется равнобедренный треугольник, как в контрпримере. Это несложно доказать как геометрически, так и алгебраически с помощью теоремы косинусов (при этом альтернатива соответствует выбору одного из двух корней квадратного уравнения на третью сторону). Если про треугольники дополнительно известно, что они оба — остроугольные, прямоугольные или тупоугольные, то признак Сёмы верен (для прямоугольных треугольников он проходится в школах — признак равенства по катету и гипотенузе).

Листок 8.

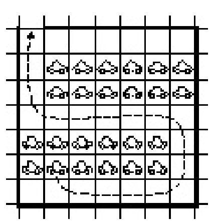
$\boxed{\textbf{1}}$ Давным-давно барон Мюнхгаузен обнёс свои владения забором и нарисовал на карте (рисунок слева). Забор изображён замкнутой несамопересекающейся ломаной, внутри которой — владения барона. Барон забыл, входит ли в его владения деревня Гаузеновка. К сожалению, он смог найти лишь обрывок карты, на который попали его дом, деревня Гаузеновка и часть забора, проходящая по этому участку. Выясните, входит ли деревня во владения барона.

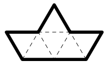


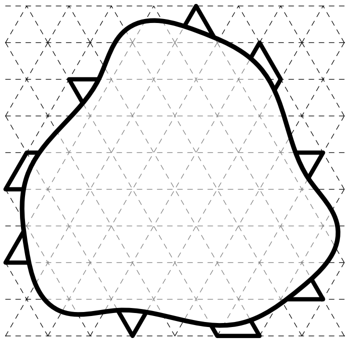


$\boxed{\textbf{2}}$ Внутри забора, представляющего собой замкнутую несамопересекающуюся ломаную, заперт тигр. На рисунке справа видна только часть забора (положение тигра показано крестиком). Нарисуйте, как мог бы выглядеть весь забор (забор может идти только по линиям сетки).

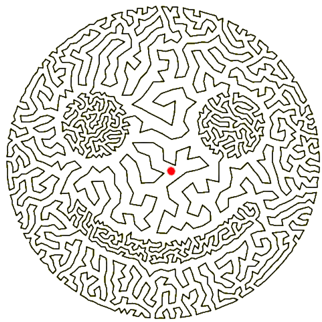
$\boxed{\textbf{3}}$ Автостоянка в Цветочном городе представляет собой квадрат 7×7 клеток, в каждой из которых можно поставить машину. Стоянка обнесена забором, одна из сторон угловой клетки удалена (это ворота). Машина ездит по дорожке шириной в клетку. На рисунке справа размещено 24 машины так, что любая может выехать, когда прочие стоят. Попробуйте разместить 28 машин.



4 На треугольной сетке Стёпа нарисовал без просветов и наложений несколько вот таких корабликов:  Затем он покрыл рисунок платком необычной формы (см. картинку). Сможете ли вы восстановить рисунок Стёпы?

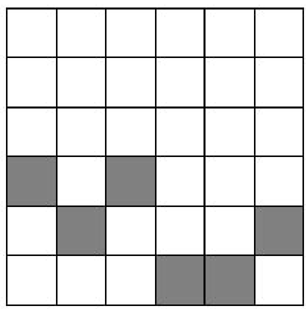


5 На рисунке справа вы видите многоугольник и точку. Где находится точка — внутри или снаружи многоугольника?



6 Клетчатый бумажный квадрат 8×8 согнули несколько раз по линиям клеток — в результате получился квадратик 1×1, который затем разрезали по отрезку, соединяющему середины его противоположных сторон. На сколько частей мог при этом распасться квадрат?

7 Квадратная скатерть разделена на 36 единичных квадратиков, некоторые из них испачканы краской (см. рис.). Скатерть можно сгибать вдоль линий, разделяющих квадратики; при этом краска переносится на другие квадраты при соприкосновении с ними. За какое наименьшее число сгибов можно испачкать всю скатерть?

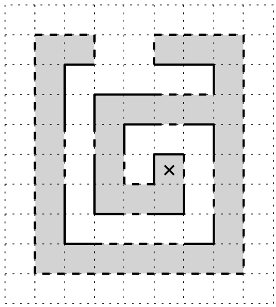


Ответы и комментарии

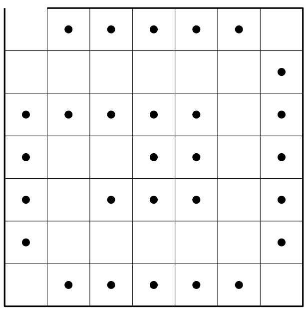
$\boxed{\textbf{1}}$ Ясно, что с одной стороны от любой границы — владения барона, а с другой — чужая территория. Поэтому для решения достаточно провести любую кривую от замка барона до деревни и выяснить, чётное или нечётное число раз она пересекает границу. В нашем случае — чётное, поэтому деревня принадлежит барону.

Можете напомнить школьникам про метод интервалов и метод областей решения неравенств.

$\boxed{\textbf{2}}$ Вот одно из решений:



$\boxed{\textbf{3}}$ Эта задача с матпраздника (6 класс, 2008 год), где предлагалось просто увеличить число машин. Вот решение жюри. Можно ли больше, члены жюри не знали. Это хорошая задача для исследования.



$\boxed{\textbf{4}}$ Когда вы будете принимать задачу у школьника, у него уже будет готовый рисунок, и это может вызвать трудности при объяснении. Лучше, если школьник начнёт обводить кораблики «с чистого листа» у вас на глазах, комментируя положение каждого кораблика. Для этого у вас должно быть достаточно запасных листочков или хотя бы шаблонов с треугольной сеткой.

Также заранее продумайте разбор задачи. На доску вынесите картинку из условия, но не готовый ответ.

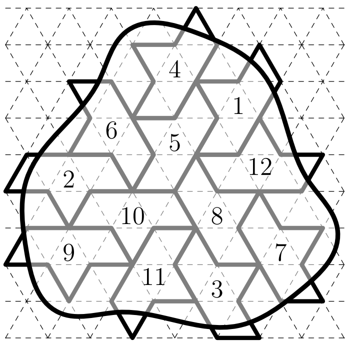
1. Начнём с корабликов, у которых из-под платка выступают кусочки двух треугольников (мы их занумеровали 1, 2, 3 на рисунке ниже).

2. По кораблику 1 восстанавливается кораблик 4, а из 1 и 4 — кораблик 5.

3. Кораблики 1, 2 и 5 определяют положение кораблика 6 (в случае другого его расположения без наложений образуется просвет из двух треугольников).

4. Аналогично, по кораблику 3 восстанавливается кораблик 7, из 3 и 7 — 8, а по кораблику 2 определяется кораблик 9, по 2 и 9 — 10.

5. Оставшиеся кораблики 11 и 12 видны.



5 Здесь та же идея, что и в первой задаче. Впрочем, от точки легко пройти к границе и не пересекая её. Тогда, уперевшись в тупик, надо сделать вывод, что точка внутри. Не удивляйтесь, однако, если школьники, оказавшись в такой ситуации, будут искать другие выходы из лабиринта...

6 Вся трудность в том, что вариантов сгиба очень много, и надо придумать рассуждение, не зависящее от них. Впрочем, полезно сделать несколько опытов, скажем, с квадратом 4×4 или даже

2×2. Это, по крайней мере, подскажет ответ, а, возможно, и идею решения.

Пусть разрез проходил вертикально. Проведём во всех квадратиках 1×1 вертикальные отрезки, соединяющие середины противоположных сторон. При сгибании по линиям клеток эти отрезки накладываются друг на друга. Следовательно, разрезались они и только они. При этом получается 9 частей.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Скатерть состоит из 26 квадратиков, 6 из которых закрашены. После каждого сгиба число закрашенных квадратиков не может увеличиться более чем вдвое. Поэтому после первого сгиба может быть максимум 12 закрашенных квадратиков, после второго — максимум 24. Значит, понадобится не менее трёх сгибов. С другой стороны, трёх сгибов достаточно: 1) вдоль вертикали между 2-м и 3-м столбцами; 2) вдоль средней вертикали; 3) вдоль средней горизонтали.

Листок 9. Инвариант

$\boxed{\mathbf{1}}$ Какое число нужно вычесть из числителя дроби $\dfrac{537}{463}$ и прибавить к знаменателю, чтобы после сокращения получить $\dfrac{1}{9}$?

$\boxed{\mathbf{2}}$ На столе стоят 16 стаканов. Из них 15 стаканов стоят правильно, а один перевёрнут донышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?

$\boxed{\mathbf{3}}$ На доске написаны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. За один ход разрешается к любым двум из них одновременно добавлять по единице. Можно ли за несколько ходов все числа сделать равными?

$\boxed{\mathbf{4}}$ В пробирке находятся марсианские амёбы трех типов A, B и C. Две амебы любых двух разных типов могут слиться в одну амёбу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амёба. Каков её тип, если исходно амёб типа A было 20, типа B — 21, типа C — 22?

$\boxed{\mathbf{5}}$ В странах Диллии и Даллии денежными единицами являются диллеры и даллеры соответственно, причем в Диллии диллер меняется на 10 даллеров, а в Даллии даллер меняется на 10 диллеров. Начинающий финансист имеет 1 диллер и может свободно переезжать из одной страны в другую и менять свои деньги в обеих странах. Докажите, что количество даллеров у него никогда не сравняется с количеством диллеров.

$\boxed{\mathbf{6}}$ В первый трёхлитровом сосуде налили 1 литр воды, а во второй — 1 литр 50%-раствора соли. Можно ли с помощью нескольких переливаний добиться того, чтобы в первом сосуде был 30%-раствор соли?

Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ Конечно, можно составить уравнение $\dfrac{537-x}{463+x}=\dfrac{1}{9}$, но можно заметить, что при любом x сумма числителя и знаменателя всегда постоянна и равна 1000. Значит, надо разбить 1000 в сумму двух слагаемых, относящихся как $1:9$, т. е. $100+900$. Отсюда $x=437$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ На самом деле этого добиться нельзя, даже если переворачивать по два стакана. Действительно, при этом чётность числа правильно стоящих стаканов не меняется, в то время как в начале их 15, а в конце должно стать 16.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Здесь тоже дело в чётности. Сумма всех чисел каждым ходом увеличивается на 2, т. е. её чётность — инвариант. В начале есть ровно три нечётных слагаемых $(1,3,5)$, поэтому сумма нечётна, а в конце должна делиться на 6, в частности, должна быть чётной. Это невозможно.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Здесь идея чётности несколько завуалирована, хотя условие подсказывает обратить внимание на *сумму количеств амёб в любых двух пробирках.* Ясно, что чётность любой такой суммы не меняется. Эта сумма чётна только для пробирок A и C (в них чётное число амёб, а в пробирке B — нечётное). Значит, одна амёба может остаться только в пробирке B.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Разность между числом диллеров и числом даллеров изначально равна 1, а должна стать равной 0. Что с ней происходит при обмене? Она либо увеличивается, либо уменьшается на 11, значит, *её остаток при делении на 11* — инвариант. В частности, он не может из единицы превратиться в нуль!

$\boxed{\mathbf{6}}$ Очевидно, что нет. Но аккуратное доказательство нередко вызывает трудности, даже у преподавателей.

В этой задаче имеется *полуинвариант* — величина, которая может изменяться в процессе, но только *в одну сторону* и/или значение которой ограничено сверху (снизу) некоторой константой. Именно, рассмотрим концентрации ν_1 и ν_2 соли в сосудах и докажем, что пока в каждом сосуде остаётся жидкость, выполняются

неравенства
$$\nu_1 < \nu_2 \leqslant 50\%.$$
В самом деле, в начальный момент $\nu_1 = 0$ и $\nu_2 = 50\%$. При переливании $1 \to 2$ (не всей жидкости) величина ν_1 не меняется, а ν_2 уменьшается. При переливании $2 \to 1$, напротив, ν_2 не меняется (оставаясь меньше $1/2$), а ν_1 увеличивается, оставаясь меньше ν_2. И только если всю жидкость перельют в один сосуд, концентрация соли стабилизуется на отметке 25%. Пусть в какой-то момент концентрация ν_1 стала равна 30%. Тогда второй сосуд непуст и $\nu_2 > 30\%$. Перельём всю жидкость в первый сосуд. При этом как всегда ν_1 увеличится, хотя должна стать равной 25%. Противоречие.

Листок 10. Алгебра

$\boxed{\mathbf{1}}$ Число a на 1 больше числа b. Может ли быть так, что $a^{100} = b^{100}$?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Решите уравнение $(x+1)^4 = (x-3)^4$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ *Теорема Софи Жермен.* Докажите, что число $n^4 + 4$ является составным при всех натуральных $n > 1$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Какое из чисел больше и на сколько:

а) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$ и 2^{64};

б) $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)$ или 2^{64}?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Разложите многочлены на множители с действительными коэффициентами: **а)** $x^4 + 1$; **б)*** $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; **в)**** $x^6 + x^3 + 1$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ На доске выписаны числа $1, 1/2, \ldots, 1/100$. Разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их на число $ab+a+b$. Какое число останется после 99 таких операций?

Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ Конечно, может, *например,* при $a = \frac{1}{2}$ и $b = -\frac{1}{2}$. Этот пример единственный, однако школьники не должны это доказывать. А вот при разборе это стоит объяснить. Используйте утверждение: если $x > y \geqslant 0$, то $x^n > y^n$ для любого натурального n. (Отсюда и из условия сразу следует, что $|a| = |b|$.) В зависиимости от уровня школьников его можно либо доказать, либо только сформулировать.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Главная идея:

$$a^4 = b^4 \iff a = \pm b$$

(для действительных a и b!). Насчёт обоснования — см. комментарий к первой задаче.

Поскольку $x + 1 > x - 3$, то единственная возможность: $x + 1 = 3 - x$, т. е. $x = 2$.

Обратите внимание, что вместо четвёрки в показателе могло стоять любое чётное число. И конечно, отговаривайте школьников раскрывать скобки!

$\boxed{\mathbf{3}}$ Прибавим и вычтем $4n^2$:

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2).$$

Часто школьники, обрадовавшись, что догадались до такого трюка, забывают про одну маленькую деталь. Спросите, где они использовали неравенство $n > 1$. Ведь именно благодаря ему оба множителя найденного разложения больше 1 (а потому $n^4 + 1$ составное):

$$n^2 + 2n + 2 > n^2 - 2n + 2 = (n - 1)^2 + 1 > 1, \text{ если } n - 1 > 0.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Не спешите морочить голову школьникам формулами типа

$$b_1 + \ldots + b_1 q^{n-1} = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ваша задача — добиться, чтобы школьники *поняли принцип суммирования геометрической прогрессии*, а для этого достаточно разобрать конкретные примеры (обобщения и готовые формулы — потом или на уроках).

а) Прибавив 1 к первому числу, получим второе. Расскажите легенду о вознаграждении создателю шахматной игры в виде зёрен риса на клетках шахматной доски.

б) В первом выражении можно раскрыть скобки — получится сумма из пункта **а)**. А можно умножить первое число на $2-1$ и последовательно сворачивать по формуле разности квадратов.

Эти приёмы подводят к суммированию геометрической прогрессии в общем виде: умножение суммы $1+q+\ldots+q^{n-1}$ на «сворачивающий множитель» $1-q$ приводит к уничтожению внутренних слагаемых; остаются только крайние: $1-q^n$. Проведите аналогию с формулой разности n-х степеней a^n-b^n. Это ведь всё одно и то же! Упомяните частные случаи — разность квадратов и разность кубов.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Легко видеть, что при всех $x \in \mathbb{R}$ эти выражения положительны (кстати, почему?). Однако это, конечно, не значит, что разложить их нельзя — вполне может найтись разложение в произведение квадратных трёхчленов (с отрицательными дискриминантами). И правда, в пункте **а)** для этого достаточно прибавить и вычесть $2x^2$:

$$x^4+1=(x^2+1)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right).$$

Многочлен в **б)** удобно разделить на x^2 — это позволит сделать замену $y=x+\frac{1}{x}$ (вообще, стандартная идея для симметричных многочленов):

$$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\underbrace{x+\frac{1}{x}}_{y}-1=$$

$$=\left(y-\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(y+\tfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right),\text{ откуда}$$
$$x^4+x^3+x^2+x+1=\left(x^2-\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}x+1\right)\left(x^2+\tfrac{\sqrt{5}+1}{2}x+1\right).$$

Самое интересное начинается в пункте **в)**. Здесь та же идея приводит к кубическому многочлену:

$$x^3 + 1 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = y^3 - 3y + 1. \qquad (2)$$

Вряд ли стоит рассказывать формулу Кардано, тем более, она здесь не поможет. Можете сразу привести готовое разложение — вы наверняка шокируете школьников:

$$\begin{aligned} &x^6 + x^3 + 1 = \\ &= \left(x^2 - 2\cos\tfrac{2\pi}{9}x + 1\right)\left(x^2 - 2\cos\tfrac{4\pi}{9}x + 1\right)\left(x^2 - 2\cos\tfrac{8\pi}{9}x + 1\right). \end{aligned}$$

В принципе корни многочлена $y^3 - 3y + 1$ можно найти тригонометрически, сделав замену $y = 2\cos\varphi$ и воспользовавшись формулой тройного угла $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$. Но, во-первых, это несколько искусственно, а во-вторых, восьмиклассники едва ли её знают (с доказательством). Эта задача явно «на вырост».

Стоит, конечно, сказать, что все три пункта допускают единообразное решение с помощью комплексных чисел. Подробности см., например, в статье А. Канунникова „Магия комплексных чисел“ (Квант, 2017, №5,6).

$\boxed{\mathbf{6}}$ Главная идея — инвариант: неважно, в каком порядке производятся операции. Точно так же неважно, как числа складываются и умножаются! Обозначим операцию из условия так:

$$a \otimes b = ab + a + b.$$

Выражаясь научным языком, она *коммутативна и ассоциативна*, т. е. порядок аргументов не имеет значения и скобки раскрывать можно в любом порядке:

$$a \otimes b = b \otimes a, \qquad (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c).$$

Именно это равенство и надо доказать. Тогда можно сказать, что имеет смысл выражение

$$1 \otimes \frac{1}{2} \otimes \ldots \otimes \frac{1}{100}$$

(как в случае с суммой и произведением), и вычислить его слева направо (сделать несколько первых шагов и подметить закономерность). Но как это сделать техничнее? И заодно как проще всего доказать ассоциативность? Вот вторая ключевая идея:

$$a \otimes b = ab + a + b = (a+1)(b+1) - 1.$$

Отсюда

$$a \otimes b \otimes c = (a+1)(b+1)(c+1) - 1$$

и т. д. для любого числа «множителей». Пусть школьники *проговорят»* эту операцию словами. Теперь ясно, что

$$1 \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{3} \otimes \ldots \otimes \frac{1}{100} = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{101}{100} - 1 = 101 - 1 = 100.$$

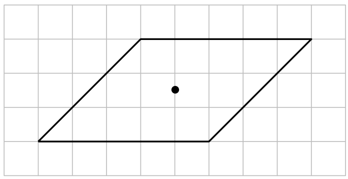
Листок 11. Клеточки

$\boxed{\textbf{1}}$ На клетчатой бумаге проведена диагональ прямоугольника 2×3. Как, пользуясь только линейкой без делений, разделить этот отрезок на 5 равных частей?

$\boxed{\textbf{2}}$ Нарисуйте на клетчатой бумаге треугольник с вершинами в углах клеток, две медианы которого перпендикулярны.

$\boxed{\textbf{3}}$ На клетчатой бумаге отмечено 5 узлов (точек пересечения линий сетки). Докажите, что среди них есть два, середина отрезка между которыми тоже попадает в узел.

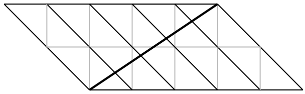
$\boxed{\textbf{4}}$ На рисунке изображён параллелограмм с отмеченным центром (точкой пересечения диагоналей). Проведите через него прямую так, чтобы она разбила параллелограмм на две части, из которых можно сложить ромб.



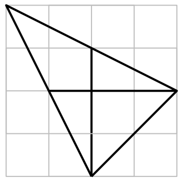
$\boxed{\textbf{5}}$ Двенадцатью спичками длиной в 1 дюйм несложно ограничить квадрат площадью 9 квадратных дюймов. А как ограничить теми же спичками фигуру площадью 4 квадратных дюйма? Спички нельзя ломать и накладывать одну на другую.

Ответы и комментарии

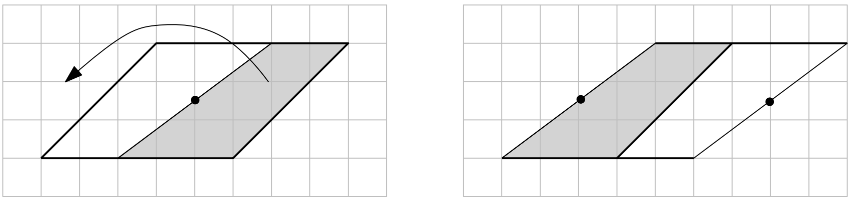
$\boxed{1}$ Эта задача на теорему Фалеса, см. рисунок:



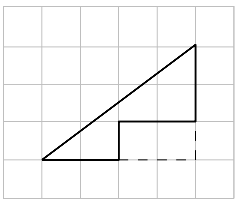
$\boxed{2}$ Начнём с медиан, не забыв, что они делятся точкой пересечения в отношении $2:1$.



$\boxed{3}$ Будем строить ромб со стороной 5. Две из сторон при этом будут горизонтальными, а две другие будут представлять собой гипотенузы египетских треугольников со сторонами $3, 4, 5$, см. рисунок:



$\boxed{4}$ Вновь стартуем с египетского треугольника со сторонами $3, 4, 5$. Он составлен из 12 спичек и имеет площадь 6. Переложив в нём три спички, отнимаем от площади 2 клетки (см. рисунок).



Это одно из возможных решений. Отметим, что необходимо предъявить фигуру явно.

Листок 12. Делимость и комбинаторика

$\boxed{1}$ В каждом столбце следующей таблицы — бесконечно много произведений. Найдите наибольший общий делитель произведений в каждом столбце:

	Пример	**а)**	**б)**	**в)***
	$1\cdot 2$	$1\cdot 2\cdot 3$	$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$	$1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k$
	$2\cdot 3$	$2\cdot 3\cdot 4$	$2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$	$2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k+1)$
	$3\cdot 4$	$3\cdot 4\cdot 5$	$3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$	$3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(k+2)$
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
Ответ:	2			

$\boxed{2}$ Про целые числа a, b, c известно, что $a+b+c \vdots 6$. Докажите, что $a^3+b^3+c^3 \vdots 6$.

$\boxed{3}$ Докажите, что дробь **а)** $\dfrac{(a+b)!}{a!b!}$; **б)** $\dfrac{(a+b+c)!}{a!b!c!}$ при любых натуральных a, b, c принимает целые значения.

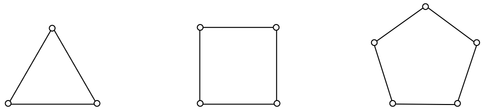
$\boxed{4}$ Докажите, что $(n^2)!$ делится на **а)** $n!^n$; **б)*** $n!^{n+1}$ при любом натуральном n.

$\boxed{5}$ Какие из следующих утверждений верны для любого целого a?

Пример	**а)**	**б)**	**в)**
$a^2-a \vdots 2$	$a^3-a \vdots 3$	$a^4-a \vdots 4$	$a^5-a \vdots 5$
верно			

$\boxed{6}$ Сколькими способами можно покрасить вершины правильного k-угольника в a цветов, если раскраски, получаемые друг из друга поворотом, считаются одинаковыми?

а) $k=3$ **б)** $k=4$ **в)** $k=5$



$\boxed{7}$ *Малая теорема Ферма.* Докажите, что a^p-a кратно p при всех целых a и простых p.

Ответы и комментарии

Первые пункты в задачах на делимость этого листка несложные и решаются непосредственно. В общем случае неожиданно помогают комбинаторные рассуждения. Листок стоит давать, если школьники уже имеют опыт решения комбинаторных задач.

$\boxed{1}$ **а)** Очевидно, из трёх подряд идущих чисел одно делится на 3 и хотя бы одно — на 2. Поэтому их произведение делится на 2 и на 3, а значит, на 6. Это тонкий момент. Если школьник говорит, что этот переход очевиден, но не может его аккуратно доказать, ему стоит помочь. Ссылаться при этом на основную теорему арифметики нет нужды. Проще: если $n \vdots 3, 2$, то $n = 3n - 2n \vdots 6$.

Поскольку первое произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, то ответ: 6.

б) Часто приходится слышать аналогичное рассуждение: «Из четырёх последовательных чисел найдётся кратное 4, найдётся кратное 3 и тем более 2. Значит, произведение $P = n(n+1)(n+2)(n+3)$ кратно $2 \cdot 3 \cdot 4$. Ошибка очевидна: мы доказали только, что P кратно 4 и 3, а делимость на 2 слабее делимости на 4. Вообще говоря, если какое-то целое a кратно 2, 3 и 4, то отсюда вовсе не следует, что оно кратно 24, например, при $a = 12$.

Тут всё дело во взаимной простоте. Вот аккуратное рассуждение: P кратно 8 (т. к. среди четырёх множителей один кратен четырём, а другой — двум) и 3, отсюда $P = 3 \cdot 3P - 8P \vdots 24$. Если последний переход школьник сделать не может, ему стоит помочь. Вообще, взаимно простые m, n обладают свойством: *если $a \vdots m, n$, то $a \vdots mn$*, но мало кто из 8-классников это докажет. Обоснование в общем случае аналогичное и вытекает из линейного представления НОД (алгоритм Евклида) или вытекающей из него основной теоремы арифметики. В зависимости от уровня школьников это можно с разной степенью подробности рассказать во время разбора. Только помните: у вас кружок, а не урок в матшколе и не лекция в университете.

в) Здесь теоретико-числовое доказательство существенно труднее, хотя в принципе возможно: нужна *формула Лежандра* для показателя простого делителя p в разложении $k!$. Гораздо проще и изящнее применить комбинаторику! Пункты а) и б) подсказывают, что ответ $k!$, а уже пункт б) показывает, что наивное рассуждение с перемножением чисел от 1 до k неубедительно.

Факториал $k!$ в комбинаторике — это число перестановок k объектов, а произведение $(n+1)\ldots(n+k)$ — это число размещений из $n+k$ по k. Например, столькими способами можно составить очередь длины k из $n+k$ человек: на первое место можно поставить любого из $n+k$ человек, на второе — любого из $n+k-1$ остальных и т. д. Если же мы просто выбираем k человек из n без учёта порядка, то ответ в $k!$ раз меньше, т. к. именно $k!$ способами можно выстроить в очередь k человек. Вот такое простое рассуждение доказывает, что ответ к нашей задаче равен $k!$ и одновременно даёт формулу для *числа сочетаний*

$$C_{n+k}^{k} = \frac{(n+1)\ldots(n+k)}{k!}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Как следует из 1а), *разность куба целого числа и самого числа кратна 6:*

$$n^3 - n = (n-1)n(n+1) \,\vdots\, 6.$$

Следовательно, разность

$$(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c) = (a^3-a)+(b^3-b)+(c^3-c) \,\vdots\, 6.$$

По условию вычитаемое $a+b+c \,\vdots\, 6$, значит, и уменьшаемое $a^3+b^3+c^3 \,\vdots\, 6$.

Отметим, что есть и другое (более трудное) решение:

$$(a+b+c)^3 = \underbrace{a^3+b^3+c^3}_{X} + \underbrace{3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)}_{Y} + \underbrace{6abc}_{Z}.$$

Левая часть по условию кратна 6. Очевидно, $Z \,\vdots\, 6$. Кроме того,

$$a^2b+ab^2 = ab(a+b)$$

всегда чётно (задача 2 на с. 7), поэтому $Y \vdots 6$. Следовательно, $X \vdots 6$.

Стоит похвалить школьника, если он правильно раскрыл скобки в $(a+b+c)^3$, а если он при этом ошибся, обязательно помочь. Если вы хотите подтянуть у школьников алгебру, разберите это решение подробно: объясните, как появляются коэффициенты при раскрытии скобок и как себя проверить, например, по сумме коэффициентов, которая получается при подстановке $a = b = c = 1$ и равна 27.

$\boxed{\mathbf{3}}$ **а)** Следует из 1в): $\dfrac{(a+b)!}{a!b!} = C_{a+b}^{a}$ — целое число.

б) Это число перестановок с повторениями. В данном случае — число слов из a букв А, b букв В и c букв С. Школьникам лучше всего объяснять их на примерах. Лучше будет, если школьники уже решали комбинаторные задачи типа «Сколькими способами можно переставить буквы в словах КОРОБ, КОЛОКОЛ?»

Проговорите, как обобщить эти пункты на любое число множителей. Отсюда сразу будет следовать решение пункта а) следующей задачи.

$\boxed{\mathbf{4}}$ **а)** Опять перестановки с повторениями: $\dfrac{(n^2)!}{n!^n}$ — это число слов из букв $x_1, \ldots, x_n$, в которых каждая буква встречается по n раз. Другими словами, это коэффициент при $x_1^n \ldots x_n^n$ при раскрытии скобок $(x_1 + \ldots + x_n)^n$.

б) Все слова (одночлены), рассмотренные в пункте а), можно разбить на $n!$ одинаковых групп: берём одно слово и целиком переставляем в нём группы одинаковых букв (у всех букв x_i индекс i меняется на один и тот же индекс j) — всего будет $n!$ слов в каждой группе.

Другое объяснение к обоим пунктам. Пусть есть n^2 человек и надо разбить их на n команд по n человек в каждой. Если порядок команд имеет значение, то ответ $\dfrac{(n^2)!}{n!^n}$, а если нет, то $\dfrac{(n^2)!}{n!^{n+1}}$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ **а)** $a^3 - a = a(a-1)(a+1)$ кратно 6, см. задачу 1а).

б) Это неверно при $a = 2$.

в) $a^5 - a = a(a-1)(a+1)(a^2+1) = A$. Можно перебрать остатки при делении на 5. Проще использовать симметричную систему вычетов: $0, \pm 1, \pm 2$. Если $a \equiv 0, \pm 1 \pmod 5$, то, очевидно, $A \,\vdots\, 5$ (язык сравнений используйте, только если школьники готовы к нему, иначе пишите подробно: если $a = 5k+1$ или $a = 5k-1$, где k — целое, ...). Остался случай $a \equiv \pm 2 \pmod 5$. Тогда $a^2+1 \equiv (\pm 2)^2 + 1 = 0 \pmod 5$. Подробнее: если $a = 5k \pm 2$, то

$$a^2+1 = (5k \pm 2)^2 + 1 = 5(5k^2 \pm 4k + 1) \,\vdots\, 5.$$

Конечно, эти пункты подводят к малой теореме Ферма и её комбинаторному доказательству (следующие две задачи).

$\boxed{6}$ **а)** Всего существует a^3 раскрасок треугольника. Среди них a одноцветных. Остальные $a^3 - a$ разбиваются на тройки эквивалентных. Итого $a + \frac{a^3-a}{3}$.

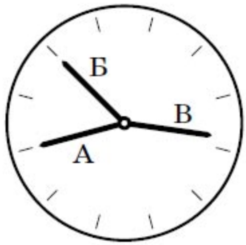
б) Все a^4 раскрасок квадрата разбиваются на три группы: a одноцветных, $a^2 - a$ раскрасок в два чередующихся цвета и $a^4 - a^2$ остальных. Раскраски второй группы разбиваются на пары эквивалентных, а раскраски третьей группы — на четврёки эквивалентных. Отсюда ответ: $a + \frac{a^2-a}{2} + \frac{a^4-a^2}{4}$.

в) Решение аналогично пункту а). Ответ: $a + \frac{a^5-a}{5}$. Надо только доказать, что если в раскраске использованы хотя бы два цвета, то все 5 раскрасок, полученных из неё поворотами, различны. Это очевидно: если раскраска перешла в себя при повороте на два деления, то вершины, идушие через одну, одноцветны. Тогда все вершины одноцветны.

$\boxed{7}$ Аналогично предыдущей задаче, попарно неэквиалентных раскрасок правильного p-угольника $a + \frac{a^p-a}{p}$ при любом простом p. Нужно доказать, что если раскраска перешла в себя при повороте на k делений, где $1 \leqslant k < p$, то она перейдёт в себя при повороте на 1 деление, т. е. одноцветна. Это равносильно тому, что k обратимо по модулю p: $kq \equiv 1 \pmod p$ для некоторого целого q. Последнее следует из алгоритма Евклида. Можно также провести рассуждение с делением с остатком. Пусть d такое наименьшее число от 1 до p, что при повороте на угол $2\pi/d$ (на d делений) раскраска перейдёт в себя. Тогда p кратно d (иначе разделим с остатком и получим противоречие с минимальностью d), откуда $d = 1$ или $d = p$. В первом случае раскраска одноцветная, во втором — из неё поворотами получаются p различных раскрасок.

Листок 13

1 Дима увидел в музее странные часы: на их циферблате нет цифр и вообще непонятно, где у часов верх; да ещё секундная, минутная и часовая стрелки имеют одинаковую длину. Какое время показывали часы? (Стрелки А и Б на рисунке смотрят ровно на часовые отметки, а стрелка В чуть-чуть не дошла до часовой отметки.)



2 Остап Бендер и Киса Воробьянинов разделили между собой выручку от продажи слонов населению. Остап подумал: если бы я взял денег на 40% больше, то доля Кисы уменьшилась бы на 60%. А как изменилась бы доля Воробьянинова, если бы Остап взял себе денег на 50% больше?

3 В клетках доски 10×10 записаны числа от 0 до 99 так, как показано на рисунке. На доску поставили 10 не бьющих друг друга ладей. Чему может быть равна сумма чисел в клетках, занятых ладьями? (Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

4 Имеется 9 одинаковых с виду монет. Какая-то из монет фальшивая, она легче настоящей. Одна монета (неизвестно — фальшивая или настоящая) прилипла к одной из чаш чашечных весов без гирь. Отдирать её некогда. Как за два взвешивания найти фальшивую монету?

$\boxed{\mathbf{5}}$ **а)** Может ли работа фирмы за любые 5 подряд идущих месяцев года быть прибыльной, а по итогам года — убыточной?

б) Может ли такое положение продолжаться в течение шести лет (т. е. по итогам любых 5 подряд идущих месяцев фирма получает прибыль, а по итогам каждого из шести лет — убыток).

$\boxed{\mathbf{6}}$ Имеется прямоугольник $2m \times 2n$ клеток (m и n — некоторые натуральные числа). Каждая его клетка покрашена в один из четырёх цветов так, что в каждом квадратике 2×2 все клетки покрашены в разные цвета. Докажите, что угловые клетки прямоугольника покрашены в разные цвета.

Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ Если бы часовая стрелка указывала ровно на какую-то отметку, то минутная и секундная указывали бы на 12, но на картинке нет совпадающих стрелок. Поэтому часовая стрелка — В. Две другие стрелки указывают ровно на отметки, и одна из них — минутная, значит, сейчас целое число минут и секундная стрелка указывает на 12. По условию стрелка В немного не дошла до часовой отметки, и мы выяснили, что это — часовая стрелка. Значит, Б — секундная стрелка (на 12), А — минутная (а не наоборот, иначе бы минутная стрелка показывала 10 минут). Итак, сейчас 4 часа 50 минут.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Пусть доли Остапа и Кисы относятся как $a : b$. Тогда $0{,}4a = 0{,}6b$, откуда $0{,}5a = 0{,}75b$, поэтому доля Кисы уменьшилась бы на 75%.

Для понимания полезно разобрать конкретный пример, скажем, у Остапа 60 рублей, у Кисы — 40. Понятно, что конкретные значения не играют роли — важно их отношение.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Если ладьи стоят по диагонали, то сумма чисел в занятых ими клетках равна

$$0 + 11 + 22 + \ldots + 99 = 11 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 495.$$

Назовём *транспозицией* перестановку двух ладей по правилу: ладьи на полях Xi и Yj заменяются ладьями на полях Xj и Yi (X и Y — столбцы, i и j — строки). При каждой транспозиции сумма чисел в клетках, занятых ладьями не меняется. Остаётся показать, что любую расстановку ладей можно получить из диагональной с помощью нескольких транспозиций (группа S_n порождается транспозициями). Если в правом верхнем углу нет ладьи, то совершим транспозицию ладей в первом столбце и первой строке. Одна из ладей окажется в правом верхнем углу, и далее можно провести то же рассуждение для доски 9×9, полученной из исходной доски удалением первой строки и первого столбца (индукция).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Занумеруем монеты числами от 1 от 9 и будем считать, что прилипшая монета имеет номер 9 и лежит на правой чаше. Сначала взвесим по три монеты. Для определённости положим к монете 9 монеты 7 и 8, а на левую чашу положим монеты 1, 2 и 3. Разберём три случая и в каждом покажем, какое дополнительное взвешивание надо сделать. Его результат сразу выявит фальшивую монету.

1) Наступило равновесие. Тогда фальшивая монета — 4, 5 или 6. Положим монеты 4 и 5 на разные чаши, а на левую положим ещё любую настоящую монету.

2) Монеты 1, 2, 3 перевесили. Тогда фальшивая — 7, 8 или 9. Положим слева 1 и 7, а справа — 2 (и 9).

3) Монеты 7, 8, 9 перевесили. Тогда фальшивая — 1, 2 или 3. Сделаем то же, что и в случае 2).

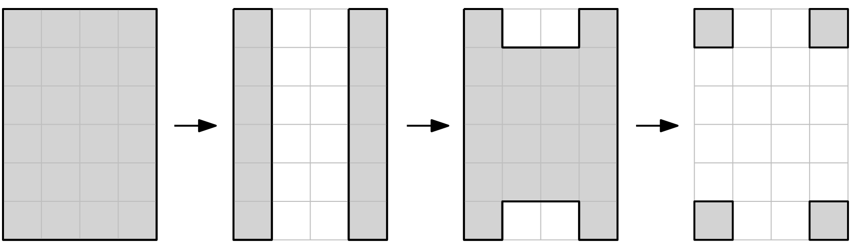
Важно понимать, что сначала необходимо взвесить по три монеты: число «подозреваемых» монет должно уменьшаться каждым ходом в три раза. Больше оно уменьшаться не может, поскольку у взвешивания может быть три результата.

$\boxed{\mathbf{5}}$ **а)** Допустим за год это так. За месяцы 1–10 у фирмы прибыль, за весь год убыток, значит, за 11 и 12 месяцы — убыток. Аналогично, убыток будет в сумме за каждую из следующих пар месяцев: 1 и 2, 6 и 7, 1 и 12. Используя это, попробуем привести пример: $-5, 0, 2, 2, 2, -1, -2, 2, 2, 2, 0, -5$.

б) Отрезок в 5 лет разбивается на 12 отрезков по 5 месяцев, за каждый из которых фирма получает прибыль. Значит, такого быть не может.

$\boxed{\mathbf{6}}$ У этой задачи несколько решений. Вот, пожалуй, самое красивое.

Каждый цвет занимает в нашем прямоугольнике четверть всей площади. Проделам с нашим прямоугольником три операции, каждый раз убирая или восстанавливая некоторый прямоугольник, имеющий чётные длину и ширину:



На каждом шаге доля каждого из четырёх цветов остаётся неизменной — четверть. Поэтому это будет верно и в конце, когда останутся 4 угловые клетки.

Есть и другое, весьма поучительное, решение. Сначала докажем утверждение для прямоугольника вида $2m \times 2$. Он разбивается на $2m$ вертикальных пар (доминошек). Каждая доминошка раскрашена в пару разных цветов, причём эти пары цветов чередуются: для нечётных доминошек одна пара цветов, для чётных — другая. В частности, первая и последняя доминошки раскрашены в 4 разных цвета. Теперь применим доказанное утверждение к прямоугольника $2m \times 2n$. Пара верхних угловых клеток раскрашены в разные цвета, пара клеток под ними раскрашшена в другие два цвета, пара клеток под этими двумя раскрашена в те же два цвета, что и пара верхних клеток, и т. д. Цвета пар крайних клеток чередуются. В частности, Пара верхних клеток и пара нижних клеток раскрашены в четыре разных цвета.

Листок 14. Графы

$\boxed{\mathbf{1}}$ а) Можно ли придумать пять таких слов, чтобы каждое имело хотя бы одну общую букву ровно с тремя другими?

б) Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

в) Можно ли расставить 7 ферзей так, чтобы каждый из них бил ровно 3 других?

$\boxed{\mathbf{2}}$ В графе каждая вершина — синяя или зелёная. При этом каждая синяя вершина связана с 5 синими и 10 зелёными, а каждая зелёная — с 9 синими и 6 зелёными. Каких вершин больше — синих или зелёных?

$\boxed{\mathbf{3}}$ На дискотеку пришли **а)** 10 девушек и 9 юношей; **б)** 11 девушек и 10 юношей. Могло ли быть так, что все девушки знакомы с различным числом юношей, а все юноши – с одинаковым числом девушек?

$\boxed{\mathbf{4}}$ На чаепитие собралось 25 ребят. Каждый принес по два пирожных. Все пирожные разложили на 25 тарелок (по две штуки на тарелку). Докажите, что как бы ни были размещены пирожные, можно так раздать тарелки ребятам, что каждому достанется хотя бы одно пирожное, которое он сам принес.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Верно ли, что вершины любого графа можно так раскрасить в два цвета, что доля рёбер с разными концами среди всех рёбер составит не менее **а)** $\frac{1}{2}$; **б)** $\frac{2}{3}$; **в)** $\frac{51}{101}$?

Ответы и комментарии

$\boxed{\textbf{1}}$ Во всех пунктах ответ: нет. Это повторение леммы о рукопожатиях: число нечётных вершин в графе чётно.

$\boxed{\textbf{2}}$ Пусть синих вершин x, а зелёных y. Тогда число рёбер равно, с одной стороны, $\frac{5x}{2} + 10y$, а с другой, $9x + \frac{6y}{2}$. Значит, $5x + 20y = 18x + 6y$, т. е. $13x = 14y$, откуда $x > y$.

$\boxed{\textbf{3}}$ Речь о двудольном графе, в котором надо посчитать число рёбер двумя способами.

а) Количества знакомых юношей у девушек могут быть только такие: $0, 1, \ldots, 9$. В сумме это 45 — при делении на 9 даёт 5, значит, каждый юноша должен быть знаком ровно с пятью девушками. Осталось привести пример:

Ю \ Д	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1				+		+	+		+	+
2				+		+	+		+	+
3					+		+	+	+	+
4					+		+	+	+	+
5					+		+	+	+	+
6				+		+		+	+	+
7			+			+		+	+	+
8		+			+			+	+	+
9			+			+	+	+		+

б) Аналогично девушки знакомы с $0, 1, 2, \ldots, 10$ юношами. В сумме это 55 — на 10 не делится. Поэтому такого быть не могло.

$\boxed{\textbf{4}}$ Рассмотрим двудольный граф: одна доля — дети, другая — тарелки, от ребёнка проводим рёбра к тарелкам, на которых есть хотя бы одно его пирожное. Надо доказать существование *полного паросочетания* в этом графе, зная, что степень каждой вершины равна 2. Это легко сделать. Рёбра разбиваются на циклы (чётной длины). Берём в каждом цикле каждое второе ребро и получаем искомое паросочетание.

Отметим, что утверждение задачи верно, если каждый ребёнок принёс k пирожных и на каждой тарелке лежит k пирожных. Однако при $k > 2$ это доказать совсем не так легко — нужна *теорема Холла о свадьбах.* Она очень известна, прочитайте и расскажите о ней заинтересовавшимся школьникам.

$\boxed{5}$ Если концы ребра покрашены в один цвет, назовём такое ребро одноцветным, а иначе — разноцветным.

а) Пусть в графе n вершин, тогда их можно раскрасить в 2 цвета 2^n способами. Каждое ребро в половине из них одцоветное, а в половине — разноцветное. Поэтому разноцветных рёбер при всех 2^n раскрасках ровно половина. Следовательно, хотя при одной раскраске будет не менее половины разноцветных рёбер.

б) Нет, полный граф на 5 вершинах так раскрасить нельзя. Рассмотрим два случая: 1) одна вершина чёрная и четыре белые — тогда разноцветных рёбер 4; 2) две вершины чёрные и три белые — тогда разноцветных рёбер 6. Всего рёбер $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$, поэтому доля разноцветных не более $\frac{6}{10} < \frac{2}{3}$.

в) Рассмотрим полный граф на $2n$ вершинах и половину его вершин раскрасим в один цвет, половину — в другой. Тогда доля разноцветных рёбер равна

$$\frac{n^2}{2n(2n-1)/2} = \frac{n}{2n-1} \to \frac{1}{2}, \quad n \to \infty.$$

Эта доля всегда больше $\frac{1}{2}$, но её можно сколь угодно приблизить к $\frac{1}{2}$, взяв достаточно большое n. Например, при $n > 51$ имеем

$$\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2-\frac{1}{n}} < \frac{1}{2-\frac{1}{51}} = \frac{51}{101}.$$

Значит, ответ: нет.

Итак, половину разноцветных рёбер гарантировать можно, а вот больше — уже нет. На научном языке это значит, что

$$\inf \sup \nu = \frac{1}{2},$$

где инфимум берётся по всем конечным графам, супремум — по всем раскраскам вершин графа в два цвета, а ν — доля разноцветных рёбер графа, раскрашенного таким образом.

Листок 15. Математические фокусы

Попробуйте отгадать секреты фокусов, и вы сможете показывать их друзьям!

$\boxed{\mathbf{1}}$ **а)** Фокусник и ассистент показывают удивительный фокус. Зрители произвольным образом раскладывают чёрно-белые фишки (с одной стороны чёрные, с другой — белые) в клетки доски 4×4 (по одной фишке в клетку) и загадывают одну из фишек, показывая на неё ассистенту. Затем ассистент переворачивает любую фишку, после чего к доске подходит фокусник (который не видел всего происходящего до этого момента) и отгадывает фишку, загаданную зрителями!

б) Если сложно понять секрет для доски 4×4, начните с доски 2×2.

в) Трудно поверить, но фокус работает и в случае доски 8×8, и вообще, в случае любой доски из 2^n клеток. А вот для других досок договориться фокуснику и ассистенту невозможно, даже для трёх фишек фокус не получится! Попробуйте это доказать.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Зритель выбирает из колоды в 52 карты любые 5 карт и, не показывая фокуснику, передаёт их его ассистенту. Ассистент выкладывает на стол в ряд какие-то четыре из этих карт. После этого к столу подходит фокусник и называет оставшуюся пятую карту. Как он это делает? (Ассистент выкладывает карты в ряд. Зритель при желании может их подравнять.)

$\boxed{\mathbf{3}}$ *Фокус Дэвида Копперфилда.* Фокусник показывает зрителям пять карт и предлагает каждому выбрать одну из них. После этого он добавляет к этим картам ещё четыре и раскладывает все 9 карт в квадрат 3×3 рубашками вверх. По команде фокусника зрители начинают мысленно ходить по картам, начиная с выбранной. За один ход каждый зритель переходит на соседнюю по стороне карту (по диагонали не ходить, через карту не прыгать). Ходы отсчитывает фокусник. Время от времени он убирает карты со стола — на пустые места ходить нельзя. В конце концов все зрители оказываются на одной карте, так ни разу и не оказавшись на той, что фокусник убрал со стола.

Ответы и комментарии

$\boxed{1}$ **б)** Пусть чёрная фишка означает 1, белая — 0. Для данного расположения фишек в квадрате 2×2 посчитаем сумму по модулю 2 в каждой из двух областей — первой строке и первом столбце. Если сумма равна 1 в данной области, значит, фишка — в этой области, иначе — в дополнении этой области. Например, пусть вы — фокусник и перед вами такая картина:

●	○
●	●

Вы считаете сумму в первой строке $1+0 = 1$ — значит, фишка в ней, и в первом столбце: $1 + 1 = 0$ — значит, фишка не в нём. Таким образом, загадана верхняя правая фишка.

Понятно, как действовать ассистенту: он считает суммы в тех же областях и для каждой области соображает, надо ли в ней менять сумму, т. е. переворачивать фишку. К примеру, для такой таблицы

○	◎
●	●

(загадана белая обведённая фишка) в первой строке надо поменять сумму (чтобы получить 1) и в первом столбце надо поменять сумму (чтобы получить 0), значит, надо перевернуть фишку в их пересечении — левую верхнюю.

а) Алгоритм такой же, теперь фишка определяется следующими четырьмя областями:

x	x		
x	x		
x	x		
x	x		

x	x	x	x
x	x	x	x

	x	x	
	x	x	
	x	x	
	x	x	

x	x	x	x
x	x	x	x

в) Назовём клетки a, b, c. Каждое расположение фишек в трёх клетках — вершина булева куба $\mathbb{Z}_2^3$:

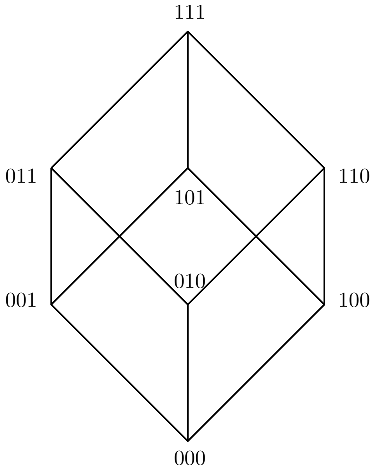
Переворачивание фишки — это переход к соседней вершине!

Пусть у фоусника с ассистентом есть алгоритм действий. Это значит следующее:

- фокусник умеет определять загаданную фишку только по вершине куба, т. е. они с ассистентом договорились, что в каждой вершине куба лежит какая-то фишка (a, b или c);

- при данном расположении фишек зритель может загадать любую из них, поэтому при каждом расположении фишек должна быть биекция между загаданными фишками и переворачиваемыми. Поэтому *в любых трёх вершинах куба, соседних с какой-то одной, должны быть записаны все три буквы* a, b, c.

Легко непосредственно показать, что последнее выполнить невозможно.



Всё сказанное до последней фразы обобщается на куб $\mathbb{Z}_2^n$ любой размерности. Несложно показать, что для выполнения *курсивного требования* (его обобщения на n фишек) число монет должно быть степенью двойки (потому что n должно делить 2^n). Это одна из дополнительных задач.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Участники заранее договариваются о нумерации всех достоинств карт числами от 1 до 13, и о нумерации всевозможных перестановок букв a, b, c от 1 до 6. Получив пять карт, ассистент выбирает из них две карты P и Q одинаковой масти. Все 13 карт этой масти мысленно кладутся по кругу в порядке возрастания номеров по часовой стрелке. Пусть от P до Q надо отсчитать по часовой стрелке p карт, а от Q до P q карт. Тогда $p+q=13$, поэтому ровно одно из слагаемых, скажем, p, не превосходит 6. Ассистент начинает ряд с P. Мысленно обозначив остальные карты буквами a, b, c в порядке возрастания номеров, он далее выкладывает из них комбинацию с номером p. Посмотрев на выложенную комбинацию карт, фокусник узнаёт p, после чего мысленно помещает левую карту в круг карт той же масти, и отсчитывает от неё p карт по часовой стрелке.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Тут всё дело в чётности. Фокусник изначально просит загадать карты с нечётными номерами $1, 3, 5, 7, 9$, а затем раскладывает их в квадрат вместе с чётными:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

(Зрители должны видеть просто карты, картинки и т. п., если они сразу увидят, что предложенные пять карт расположились в шахматном порядке, то могут быстро отгадать секрет.) Ясно, что, независимо от выбранной (нечётной) карты и ходов по доске, зрители всегда будут на полях одного цвета в шахматной раскраске. Фокусник будет периодически убирать одну-две карты другого цвета, но, разумеется, так, чтобы игровое поле оставалось связным — из любой клетки должен быть путь в любую другую, пока не останется одна клетка.