Листок 1. Логика

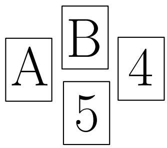
1 В день рождения дяди Фёдора почтальон Печкин хочет выяснить, сколько тому лет. Шарик говорит, что дяде Фёдору больше 11 лет, а кот Матроскин утверждает, что больше 10 лет. Сколько лет дяде Фёдору, если известно, что только один из них прав?

2 Докажите, что произведение двух целых чисел и их суммы всегда чётно.

3 К Холмсу пришли 25 рыцарей и лжецов, но рыцарей было больше. Холмс, зная это, может задать любому вопрос типа: „Кто такой-то: рыцарь или лжец?“. Как Холмсу узнать, кто есть кто, за 24 вопроса? (Рыцари всегда говорят правду, в лжецы всегда врут.)

4 Докажите, что из любых пяти натуральных чисел (не обязательно идущих подряд) можно выбрать три числа, сумма которых делится на три.

5 На столе лежат четыре карточки (см. рисунок справа). На каждой карточке с одной стороны — буква, а с другой — натуральное число. Какие карточки надо перевернуть, чтобы узнать — правда ли, что если на какой-то стороне карточки — чётное число, то на другой стороне — гласная буква?

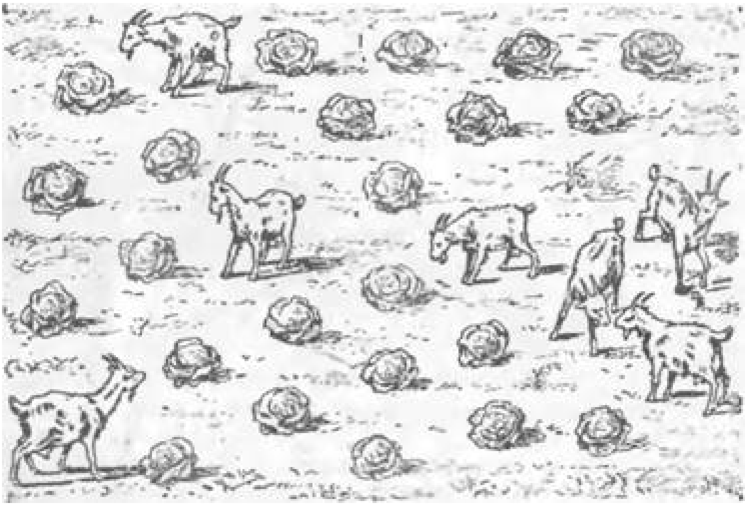


6 Пятеро рыболовов заметили, что любые двое из них вместе поймали не более 9 рыб. Каким, самое большее, может быть общий улов всех пятерых?

Листок 2. Козы

Это занятие посвящено козам. Они прожорливы и съедают всё, до чего могут дотянуться. Поэтому коз держат на привязи.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Тремя прямыми линиями отделите коз от капусты.



$\boxed{\mathbf{2}}$ На лугу между двумя колышками натянем верёвку. У второй верёвки один конец привяжем к ошейнику козы, а на другом сделаем петлю, скользящую по первой верёвке. Какой участок выест коза?

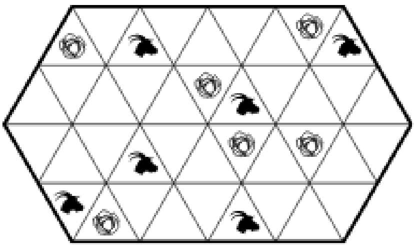
$\boxed{\mathbf{3}}$ Математик прогуливался по лугу, держа козу на поводке длиной 1 м. Математик обошёл по периметру прямоугольник 5 м $\times$ 3 м. Нарисуйте участок, на котором могла побывать при этом коза, не обрывая поводка.

$\boxed{\textbf{4}}$ С помощью колышков и верёвок удержите козу в **а)** полукруге; **б)** прямоугольнике; **в)** треугольнике.

$\boxed{\textbf{5}}$ Забор имеет вид треугольника. Внутри к серединам двух сторон привязали верёвкой по козе; длина каждой верёвки равна половине длины стороны, к которой она привязана. Могут ли козы съесть всю траву внутри забора?

$\boxed{\textbf{6}}$ В узлах клетчатой бумаги живут садовники, а вокруг них повсюду растут цветы. За каждым цветком должны ухаживать три ближайших к нему садовника. Один из садовников хочет узнать, за каким участком он должен ухаживать. Нарисуйте этот участок.

$\boxed{\textbf{7}}$ Фермер огородил снаружи участок земли и разделил его на треугольники со стороной 50 м. В некоторых треугольниках он высадил капусту, а в некоторые пустил пастись коз. Помогите фермеру построить по линиям сетки дополнительные заборы как можно меньшей общей длины, чтобы защитить всю капусту от коз, и докажите, что меньшей длиной обойтись нельзя.



Листок 3. Принцип Дирихле

$\boxed{\mathbf{1}}$ В кинотеатре 7 рядов по 10 мест в каждом. Группа из 50 детей сходила на утренний сеанс, а потом на вечерний. Докажите, что найдутся двое детей, которые на утреннем сеансе сидели в одном ряду и на вечернем сеансе тоже сидели в одном ряду.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Докажите, что из 52 целых чисел всегда найдутся два, разность квадратов которых делится на 100.

$\boxed{\mathbf{3}}$ На клетчатой бумаге отмечено 5 узлов (точек пересечения линий сетки). Докажите, что среди них есть два, середина отрезка между которыми тоже попадает в узел.

$\boxed{\mathbf{4}}$ *Сейчас вылетит птичка.* В фотоателье залетели 20 птиц — 8 скворцов, 7 трясогузок и 5 дятлов. Каждый раз, как только фотограф щёлкнет затвором фотоаппарата, какая-то одна из птичек улетит (насовсем). Сколько кадров сможет сделать фотограф, чтобы быть уверенным: у него останется не меньше пяти птиц одного вида, и не меньше трёх — другого?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Первоклассник Петя знает только одну цифру 1. Докажите, что он может написать число, кратное 1234567. (Петя может только выписывать подряд единицы.)

$\boxed{\mathbf{6}}$ Убирая детскую комнату к приходу гостей, мама нашла 9 носков. Среди любых четырёх носков хотя бы два принадлежали одному ребёнку, а среди любых пяти носков не более трёх имели одного хозяина. Сколько могло быть детей и сколько носков могло принадлежать каждому ребёнку, если у каждого был хотя бы один носок?

$\boxed{\mathbf{7}}$ Дорога протяжённостью 1 км полностью освещена фонарями, причём каждый фонарь освещает отрезок дороги длиной 1 м и после выключения любого фонаря дорога освещена уже не полностью. Какое наибольшее число фонарей может быть на дороге?

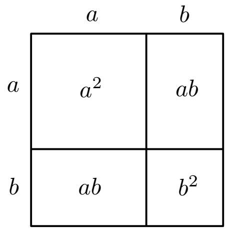
$\boxed{\mathbf{8}}$ В квадратном ковре со стороной 10 м моль проела 80 дырок (дырки считаются точечными). Докажите, что из него можно вырезать коврик стороной 1 м, не содержащий внутри себя ни одной дырки. Дырки **а)** могут; **б)** не могут находиться на границе вырезаемого коврика.

Листок 4. Геометрия преображает алгебру

Французский писатель Жан Жак Руссо не мог поверить в формулу

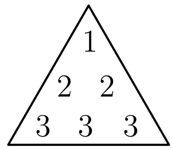
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

пока не нарисовал картинку.



1 Попробуйте геометрически вывести формулы для сумм:
а) $1+3+5+\ldots+(2n-1)$; **б)** $1+2+3+\ldots+n$.

2 Расположите в правильном треугольнике со стороной n одну единицу, две двойки, три тройки и т. д. Случай $n=3$ см. на рисунке. Рассмотрите ещё два треугольника, полученных из данного поворотом на 120° в обоих направлениях. Глядя на полученные три треугольника, выведите формулу для *суммы квадратов*



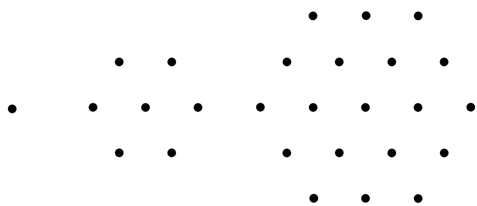
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

3 Докажите удивительное равенство

$$(1+2+3+\ldots+n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

геометрически, для чего попробуйте расположить в квадрате со стороной $1+2+3+\ldots+n$ один квадрат 1×1, два квадрата 2×2, $\ldots$, n квадратов $n \times n$. (Не отчаивайтесь, если квадраты не удаётся расположить без пустот и наложений.)

4 Сколько точек на всех ста гексах:



1) 2) 3)

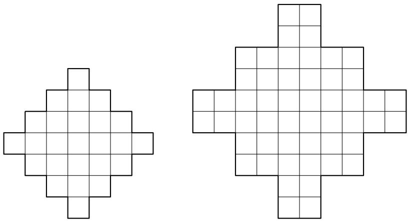
5 Выведите из решения предыдущей задачи формулу для суммы квадратов ещё одним способом.

Листок 5.

1 В городе каждый седьмой математик — философ, а каждый девятый философ — математик. Сколько математиков в городе не являются философами, если 360 философов не являются математиками?

2 Разрежьте произвольный остроугольный треугольник на три трапеции.

3 Какое наибольшее число ладей можно поставить а) на левую доску; б) на правую доску так, чтобы никакие две из них не били друг друга?



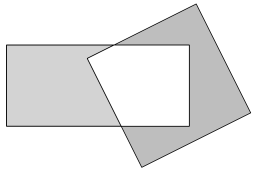
4 Маша и Паша, поссорившись, пошли в противоположные стороны с равными скоростями. Через три минуты Паша решил помириться и стал догонять Машу, увеличив скорость в три раза. Через какое время он догонит Машу, считая с того момента, как решил помириться?

5 Квадрат 2017×2017 разрезали по линиям сетки на несколько прямоугольников. Докажите, что периметр хотя бы одного из этих прямоугольников делится на 4.

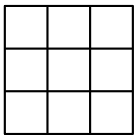
6 Длина взрослого червяка 1 метр. Если червяк взрослый, его можно разрезать на две части в любом отношении длин. При этом получаются два новых червяка, которые сразу начинают расти со скоростью 1 метр в час каждый. Когда длина червяка достигает метра, он становится взрослым и прекращает расти. Можно ли из одного взрослого червяка получить 10 взрослых червяков быстрее чем за час?

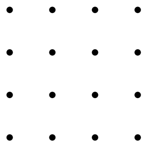
Листок 6. Семь раз отмерь — один раз отрежь

$\boxed{\mathbf{1}}$ Прямоугольник со сторонами 4 см и 9 см произвольно наложили на квадрат со стороной 6 см, как показано на рисунке слева. Сравните площади закрашенных частей прямоугольника и квадрата.

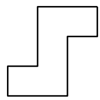


$\boxed{\mathbf{2}}$ Сколько квадратов **а)** изображено на рисунке слева; **б)** можно изобразить с вершинами в точках на рисунке справа?





$\boxed{\mathbf{3}}$ Разрежьте фигуру на рисунке справа на несколько частей и составьте из них квадрат.



$\boxed{\mathbf{4}}$ Нарисуйте на клетчатой бумаге квадрат площадью **а)** две клетки; **б)** пять клеток.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Сравните площади треугольников со сторонами $5, 5, 6$ и $5, 5, 8$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Семиклассник Сёма придумал новый признак равенства треугольников — по двум сторонам и углу *не* между ними. Прав ли Сёма?

Листок 7. Инвариант

1 Какое число нужно вычесть из числителя дроби $\frac{537}{463}$ и прибавить к знаменателю, чтобы после сокращения получить $\frac{1}{9}$?

2 На столе стоят 16 стаканов. Из них 15 стаканов стоят правильно, а один перевёрнут донышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?

3 На доске написаны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. За один ход разрешается к любым двум из них одновременно добавлять по единице. Можно ли за несколько ходов все числа сделать равными?

4 В пробирке находятся марсианские амёбы трех типов A, B и C. Две амебы любых двух разных типов могут слиться в одну амёбу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амёба. Каков её тип, если исходно амёб типа A было 20, типа B — 21, типа C — 22?

5 В странах Диллии и Даллии денежными единицами являются диллеры и даллеры соответственно, причем в Диллии диллер меняется на 10 даллеров, а в Даллии даллер меняется на 10 диллеров. Начинающий финансист имеет 1 диллер и может свободно переезжать из одной страны в другую и менять свои деньги в обеих странах. Докажите, что количество даллеров у него никогда не сравняется с количеством диллеров.

6 В первый трёхлитровом сосуде налили 1 литр воды, а во второй — 1 литр 50%-раствора соли. Можно ли с помощью нескольких переливаний добиться того, чтобы в первом сосуде был 30%-раствор соли?

Листок 8. Алгебра

1 Число a на 1 больше числа b. Может ли быть так, что $a^{100} = b^{100}$?

2 Решите уравнение $(x+1)^4 = (x-3)^4$.

3 *Теорема Софи Жермен.* Докажите, что число $n^4 + 4$ является составным при всех натуральных $n > 1$.

4 Какое из чисел больше и на сколько:
а) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$ и 2^{64};
б) $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)$ или 2^{64}?

5 Разложите многочлены на множители с действительными коэффициентами: **а)** $x^4 + 1$; **б)*** $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; **в)**** $x^6 + x^3 + 1$.

6 На доске выписаны числа 1, 1/2, …, 1/100. Разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их на число $ab+a+b$. Какое число останется после 99 таких операций?

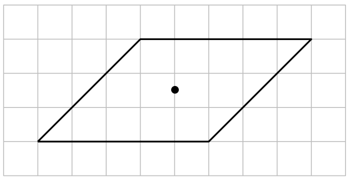
Листок 9. Клеточки

$\boxed{\mathbf{1}}$ На клетчатой бумаге проведена диагональ прямоугольника 2×3. Как, пользуясь только линейкой без делений, разделить этот отрезок на 5 равных частей?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Нарисуйте на клетчатой бумаге треугольник с вершинами в углах клеток, две медианы которого перпендикулярны.

$\boxed{\mathbf{3}}$ На клетчатой бумаге отмечено 5 узлов (точек пересечения линий сетки). Докажите, что среди них есть два, середина отрезка между которыми тоже попадает в узел.

$\boxed{\mathbf{4}}$ На рисунке изображён параллелограмм с отмеченным центром (точкой пересечения диагоналей). Проведите через него прямую так, чтобы она разбила параллелограмм на две части, из которых можно сложить ромб.



$\boxed{\mathbf{5}}$ Двенадцатью спичками длиной в 1 дюйм несложно ограничить квадрат площадью 9 квадратных дюймов. А как ограничить теми же спичками фигуру площадью 4 квадратных дюйма? Спички нельзя ломать и накладывать одну на другую.

Листок 10. Делимость и комбинаторика

1 В каждом столбце следующей таблицы — бесконечно много произведений. Найдите наибольший общий делитель произведений в каждом столбце:

	Пример	**а)**	**б)**	**в)***
	$1 \cdot 2$ $2 \cdot 3$ $3 \cdot 4$ $\ldots$	$1 \cdot 2 \cdot 3$ $2 \cdot 3 \cdot 4$ $3 \cdot 4 \cdot 5$ $\ldots$	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ $\ldots$	$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$ $2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k+1)$ $3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (k+2)$ $\ldots$
Ответ:	2			

2 Про целые числа a, b, c известно, что $a + b + c \vdots 6$. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3 \vdots 6$.

3 Докажите, что дробь **а)** $\dfrac{(a+b)!}{a!b!}$; **б)** $\dfrac{(a+b+c)!}{a!b!c!}$ при любых натуральных a, b, c принимает целые значения.

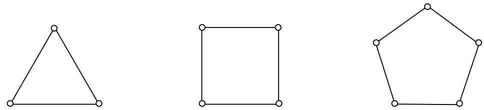
4 Докажите, что $(n^2)!$ делится на **а)** $n!^n$; **б)*** $n!^{n+1}$ при любом натуральном n.

5 Какие из следующих утверждений верны для любого целого a?

Пример	**а)**	**б)**	**в)**
$a^2 - a \vdots 2$	$a^3 - a \vdots 3$	$a^4 - a \vdots 4$	$a^5 - a \vdots 5$
верно			

6 Сколькими способами можно покрасить вершины правильного k-угольника в a цветов, если раскраски, получаемые друг из друга поворотом, считаются одинаковыми?

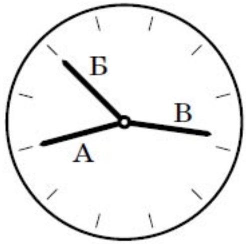
а) $k = 3$ **б)** $k = 4$ **в)** $k = 5$



7 *Малая теорема Ферма.* Докажите, что $a^p - a$ кратно p при всех целых a и простых p.

Листок 11

$\boxed{\mathbf{1}}$ Дима увидел в музее странные часы: на их циферблате нет цифр и вообще непонятно, где у часов верх; да ещё секундная, минутная и часовая стрелки имеют одинаковую длину. Какое время показывали часы? (Стрелки А и Б на рисунке смотрят ровно на часовые отметки, а стрелка В чуть-чуть не дошла до часовой отметки.)



$\boxed{\mathbf{2}}$ Остап Бендер и Киса Воробьянинов разделили между собой выручку от продажи слонов населению. Остап подумал: если бы я взял денег на 40% больше, то доля Кисы уменьшилась бы на 60%. А как изменилась бы доля Воробьянинова, если бы Остап взял себе денег на 50% больше?

$\boxed{\mathbf{3}}$ В клетках доски 10×10 записаны числа от 0 до 99 так, как показано на рисунке. На доску поставили 10 не бьющих друг друга ладей. Чему может быть равна сумма чисел в клетках, занятых ладьями? (Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

$\boxed{\mathbf{4}}$ Имеется 9 одинаковых с виду монет. Какая-то из монет фальшивая, она легче настоящей. Одна монета (неизвестно — фальшивая или настоящая) прилипла к одной из чаш чашечных весов без гирь. Отдирать её некогда. Как за два взвешивания найти фальшивую монету?

$\boxed{\mathbf{5}}$ **а)** Может ли работа фирмы за любые 5 подряд идущих месяцев года быть прибыльной, а по итогам года — убыточной?

б) Может ли такое положение продолжаться в течение шести лет (т. е. по итогам любых 5 подряд идущих месяцев фирма получает прибыль, а по итогам каждого из шести лет — убыток).

$\boxed{\mathbf{6}}$ Имеется прямоугольник $2m \times 2n$ клеток (m и n — некоторые натуральные числа). Каждая его клетка покрашена в один из четырёх цветов так, что в каждом квадратике 2×2 все клетки покрашены в разные цвета. Докажите, что угловые клетки прямоугольника покрашены в разные цвета.

Листок 12. Графы

$\boxed{\textbf{1}}$ а) Можно ли придумать пять таких слов, чтобы каждое имело хотя бы одну общую букву ровно с тремя другими?

б) Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

в) Можно ли расставить 7 ферзей так, чтобы каждый из них бил ровно 3 других?

$\boxed{\textbf{2}}$ В графе каждая вершина — синяя или зелёная. При этом каждая синяя вершина связана с 5 синими и 10 зелёными, а каждая зелёная — с 9 синими и 6 зелёными. Каких вершин больше — синих или зелёных?

$\boxed{\textbf{3}}$ На дискотеку пришли **а)** 10 девушек и 9 юношей; **б)** 11 девушек и 10 юношей. Могло ли быть так, что все девушки знакомы с различным числом юношей, а все юноши – с одинаковым числом девушек?

$\boxed{\textbf{4}}$ На чаепитие собралось 25 ребят. Каждый принес по два пирожных. Все пирожные разложили на 25 тарелок (по две штуки на тарелку). Докажите, что как бы ни были размещены пирожные, можно так раздать тарелки ребятам, что каждому достанется хотя бы одно пирожное, которое он сам принес.

$\boxed{\textbf{5}}$ Верно ли, что вершины любого графа можно так раскрасить в два цвета, что доля рёбер с разными концами среди всех рёбер составит не менее **а)** $\frac{1}{2}$; **б)** $\frac{2}{3}$; **в)** $\frac{51}{101}$?

Листок 13. Математические фокусы

Попробуйте отгадать секреты фокусов, и вы сможете показывать их друзьям!

1 **а)** Фокусник и ассистент показывают удивительный фокус. Зрители произвольным образом раскладывают чёрно-белые фишки (с одной стороны чёрные, с другой — белые) в клетки доски 4×4 (по одной фишке в клетку) и загадывают одну из фишек, показывая на неё ассистенту. Затем ассистент переворачивает любую фишку, после чего к доске подходит фокусник (который не видел всего происходящего до этого момента) и отгадывает фишку, загаданную зрителями!

б) Если сложно понять секрет для доски 4×4, начните с доски 2×2.

в) Трудно поверить, но фокус работает и в случае доски 8×8, и вообще, в случае любой доски из 2^n клеток. А вот для других досок договориться фокуснику и ассистенту невозможно, даже для трёх фишек фокус не получится! Попробуйте это доказать.

2 Зритель выбирает из колоды в 52 карты любые 5 карт и, не показывая фокуснику, передаёт их его ассистенту. Ассистент выкладывает на стол в ряд какие-то четыре из этих карт. После этого к столу подходит фокусник и называет оставшуюся пятую карту. Как он это делает? (Ассистент выкладывает карты в ряд. Зритель при желании может их подравнять.)

3 *Фокус Дэвида Копперфилда.* Фокусник показывает зрителям пять карт и предлагает каждому выбрать одну из них. После этого он добавляет к этим картам ещё четыре и раскладывает все 9 карт в квадрат 3×3 рубашками вверх. По команде фокусника зрители начинают мысленно ходить по картам, начиная с выбранной. За один ход каждый зритель переходит на соседнюю по стороне карту (по диагонали не ходить, через карту не прыгать). Ходы отсчитывает фокусник. Время от времени он убирает карты со стола — на пустые места ходить нельзя. В конце концов все зрители оказываются на одной карте, так ни разу и не оказавшись на той, что фокусник убрал со стола.