

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ



# Математический кружок

6–7 классы, 1-е полугодие (15 занятий)

Составители: Н. П. Стрелкова, С. Л. Кузнецов

Москва, 2017

**Математический кружок.** 6–7 классы, 1-е полугодие (15 занятий). / Методическое пособие для выявления и развития математических способностей обучающихся // Сост. Н. П. Стрелкова, С. Л. Кузнецов. — М.: МГУ, 2017.

Методическое пособие разработано в рамках Концепции Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова «Повышение математической культуры в обществе» и при финансовой поддержке Департамента образования г. Москвы. В основу брошюры легли задачи, представленные на Малом мехмате МГУ.

Пособие предназначено для преподавателей, организующих и проводящих математические кружки.

# Содержание

Указания по ведению кружка	4
Листок 1	7
Листок 2	12
Листок 3	17
Листок 4	22
Листок 5	26
Листок 6	30
Листок 7	34
Листок 8	38
Листок 9	42
Листок 10	47
Листок 11	51
Листок 12	53
Листок 13	56
Игра «Математический аукцион»	60
Игра «Расскажи другу»	65
Диагностическое занятие (личная олимпиада)	69

## Указания по ведению кружка

Методическая разработка состоит из 13 листочков с задачами, материалов для проведения игр «Математический аукцион» и «Расскажи другу» и диагностической работы.

Листочки предназначены для распечатывания и выдачи участникам кружка. В параграфах «Ответы и комментарии» приведены ответы к задачам, указания, советы, идеи и примеры разного рода, которые могут оказаться полезными при использовании этой разработки. Конечно, мы не предлагаем буквально следовать всем этим советам! Дополнительные задачи предназначены для школьников, успевающих быстрее других.

**Занятие по листочку** проводится по следующей схеме.

- *До занятия* руководитель кружка решает сам все задачи, которые он собирается предложить детям.
- *В начале занятия*
  - каждому участнику выдаётся распечатанный листок с условиями задач
  - дети начинают думать над задачами, каждый — сам
  - **не нужно** в начале занятия объяснять детям какие бы то ни было методы или давать советы по решению предложенных задач
  - *можно* в начале занятия разобрать некоторые задачи прошлого занятия
- *Во время кружка*
  - школьники самостоятельно думают над задачами
  - руководитель кружка индивидуально слушает решения
  - если решение неверно, школьнику предлагается подумать ещё и исправить недочёты
  - если решение верно, школьник получает «плюсик» и поздравления (Молодец!)

- **не нужно** ставить оценки
- *В конце занятия* можно (но не обязательно!) разобрать некоторые задачи у доски.
- **Мы категорически не советуем**
  - делать занятия кружка обязательными для посещения
  - проводить на кружке проверочные и контрольные работы
  - стремиться подготовить детей к определённым видам соревнований / олимпиад
  - стремиться объяснить детям решения абсолютно всех задач разработки
  - читать указания и решения к задачам, не прорешав их самостоятельно

**Плюсики** за решённые задачи обычно записываются в специальную табличку. Без неё вполне можно и обойтись, но, во-первых, она даёт возможность руководителю кружка анализировать статистику решения задач, а во-вторых — детям приятно получить «плюсик».

**Основная цель каждого занятия кружка** в том, чтобы дети самостоятельно придумали решения нескольких нестандартных задач и испытали **радость**. Поэтому не стоит расстраиваться, если некоторые задачи вы не успеете разобрать или никто из детей не дойдёт до дополнительных задач.

Мы считаем, что если участник кружка за занятие самостоятельно решит 2-3 задачи и ещё по 1-2 задачам у него будут какие-то полезные соображения, то это уже хороший результат.

**Что делать**, если задачи окажутся слишком сложными для ваших учеников. Мы ни в коем случае не советуем превращать занятие кружка в разбор всех задач у доски. Иногда можно давать подсказки (как индивидуально, так и у доски) — некоторые конкретные советы мы приводим ниже.

Если большинство предложенных задач слишком трудны, мы советуем подбирать к каждому занятию несколько задач попроще, например, начинающим очень полезно решать задачи на разрезание клетчатых фигур, расшифровывать ребусы, расставлять числа в магических фигурах, решать простые логические задачки типа задачи про балалайку из третьего листочка, и т.д.

При выборе задач в первую очередь руководствуйтесь **собственным вкусом и силами ваших детей** — задачи должны нравиться вам и должны пусть и не сразу, но без подсказок получаться у ваших детей. Вы можете воспользоваться нашим списком литературы и списком ссылок на интернет-ресурсы.

*Желаем успеха!*

# Листок 1

**1** Зайцы пилят бревно. Они сделали 10 распилов. Сколько получилось чурбачков?

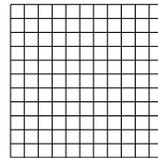
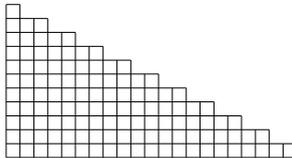
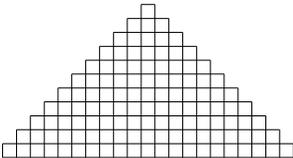
**2** Аня попала в Зазеркалье, где встретила свое отражение — Яну. Потом Яна попала в свое Зазеркалье, где встретила свое отражение — конечно же, Аню-2! Аня-2 попала в свое Зазеркалье, где была Яна-2. И так происходило достаточно долго, пока зеркало не разбилось. Назовите, как звали 1001-ю девочку.

**3** На столе лежат в ряд пять монет: средняя — вверх орлом, а остальные — вверх решкой. Разрешается одновременно перевернуть три рядом лежащие монеты. Можно ли при помощи нескольких таких переворачиваний положить монеты так, чтобы крайние слева и справа лежали орлом вверх, а остальные — решкой?

**4** Пять первоклассников стояли в шеренгу и держали 37 флажков. У всех первоклассников, стоящих справа от Тани, вместе — 14 флажков, справа от Яши — 32, справа от Веры — 20, справа от Максима — 8. Сколько флажков у Даши? А у Яши?

**5** Как из 1001 полоски бумаги шириной 1 и длинами 1, 2, ..., 1001 составить прямоугольник, длина и ширина которого больше 1? *Нужно использовать все полоски.*

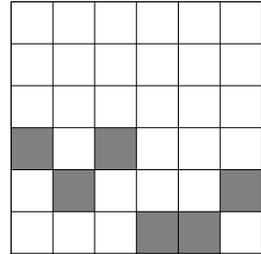
**6** В какой из нарисованных ниже фигурок больше клеточек?



### Дополнительные задачи

**7** 12-метровое бревно распилили на 3-метровые чурбаки за 12 минут. А за сколько времени 12-метровое бревно можно распилить на 1-метровые чурбаки?

**8** В квадрате  $6 \times 6$  некоторые клетки закрасены свежей краской так, как показано на рисунке. Если перегнуть квадрат по любой линии сетки, а затем разогнуть обратно, то клетки, которые при перегибании совместятся с закрасенными, тоже закрасятся.



**а)** Можно ли закрасить весь квадрат, совершив не более четырёх таких перегибаний?

**б)** А хватит ли трёх перегибаний?

## Ответы и комментарии

**1** *Ответ.* 11.

○ Как вы будете реагировать на решение «раз распилов 10, то и чурбачков 10»?

– *Почему ты думаешь, что чурбачков столько же, сколько распилов?*

– *А если, например, распилил только один?*

○ Считать ли верным решением, если ребёнок просто говорит, что чурбачков будет на 1 больше, то есть 11? – **НЕТ**, пусть объяснит

– *Попробуй нарисовать бревно.*

**2** *Ответ.* Аня-501

○ Что делать, если ребёнок показывает неверный ответ?

– *Почему ты думаешь, что имя будет «Яна»?*

– *Как звали первую девочку? а третью? а пятую?*

– *Почему ты думаешь, что номер будет именно таким?*

– *Сколько среди первых 1000 девочек было «Ань»? а «Ян»?*

○ Что делать, если ребёнок показывает **ВЕРНЫЙ** ответ?

– *Почему ты думаешь, что ответ именно такой?*

**3** *Ответ.* можно.

○ Что делать, если ребёнок говорит, что это сделать нельзя?

– *Почему ты думаешь, что это сделать невозможно?*

○ Что делать, если ребёнок начал объяснять, **ПОЧЕМУ** это сделать нельзя.

– *Слушать его (заведомо неверные) объяснения, пока вам хватит терпения и времени. Если он сам или с вашей помощью поймёт, что его объяснения недостаточны или неверны, это будет ценный опыт для него.*

**4** *Решение.* Кто стоит правее всех? Это может быть только Даша (почему?). А кто сосед Даши? Тот, справа от кого меньше всего, то есть — Максим. Значит, у Даши — 8 флажков. Крайний слева — Яша, справа от него — 32, значит у него  $37 - 32 = 5$  флажков.

○ Можно ли объяснять по-другому?

– Можно. Но обязательно нужно доказать, что Даша и Яша стоят по краям. А дальше можно найти, в каком порядке стоят первоклассники и сколько флажков у каждого.

**5** *Решение.* Сделаем прямоугольник длиной 1001. Для этого в первой строке расположим полоску длины 1001, во второй — полоски длины 1 и 1000, в третьей — 2 и 999, и т.д.

○ А что произойдёт в конце? Не останутся ли у нас лишние полоски? И каких размеров получится прямоугольник?

– Мы выкладываем пары с суммой 1001. Не считая числа 1001, у нас тысяча чисел, т.е. будет 500 пар, первая из которых — 1 и 1000, вторая — 2 и 999, а пятисотая — 500 и 501.

**6** *Ответ.* Во всех поровну.

*Решение.* Вычислять число клеточек совсем не обязательно. Например, можно заметить, что в двух пирамидках одинаковое число «этажей» и на каждом «этаже» поровну клеток. А потом разрезать любую из пирамидок на две части, повернуть и получить квадрат.

○ Ребёнок посчитал пальцем (и обсчитался на 1 клеточку, или не обсчитался). Что делать?

– Посчитай ещё раз, мне кажется, ты где-то ошибся. (это если сильно ошибся)

– Как же нам проверить твой счёт? А вдруг ты ошибся?

– А вот мне одного взгляда достаточно, чтобы понять, где больше. А ты сидишь и считаешь целых пять минут. Догадайся, как я это делаю?

**7** *Ответ.* 44 минуты.

○ Как бороться с неверным решением и натолкнуть ребёнка на верный ход решения?

– Сколько распилов сделали в первом случае?

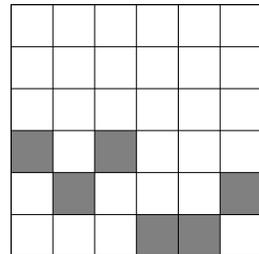
– А сколько распилов надо сделать во втором случае?

**8** *Ответ.* а) можно, б) хватит.

○ Ребёнок говорит, что это сделать нельзя.

– Почему ты так думаешь? Объясни!

– Не можешь объяснить? Ты пытался, у тебя



*не получилось, и ты решил, что нельзя? По-  
пытайся ещё! – А вы умеете? – Не скажу!*

## Листок 2

**1** У деревянного куба отпилили один угол. Сколько углов осталось?

**2** После битвы со Змеем Горынычем три богатыря заявили:  
Добрыня Никитич: „Змея убил Алёша Попович”.  
Илья Муромец: „Змея убил Добрыня Никитич”.  
Алёша Попович: „Змея убил я”.

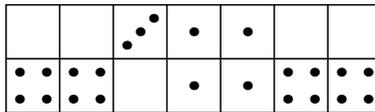
Кто убил змея, если только один из богатырей сказал правду?

**3** Расстояние между столбами изгороди равно 5 м. Сколько столбов понадобится, чтобы огородить треугольный участок со сторонами 20 м, 20 м и 30 м?

**4** Сегодня суббота. Какой день недели будет через 77 дней? а через 2014 дней? А какой день недели был 2014 дней назад?

**5** Разделите между тремя людьми семь бочонков, полных мёда, семь бочонков, наполненных мёдом наполовину, и семь пустых бочонков так, чтобы каждый получил поровну и мёда, и бочонков.

**6** В коробке лежат костяшки домино (см. рисунок). Как расположены кости?



## Дополнительные задачи

**7** Король дал двум своим мудрецам задание: „Завтра на каждого из вас наденут либо белый, либо чёрный колпак, и каждому вручат две таблички — белую и чёрную. Вы увидите только колпака товарища, но не сможете обмениваться никакой информацией. По команде вы одновременно поднимете одну из табличек. Испытание будет пройдено, если хотя бы у одного из вас цвет колпака совпадёт с цветом поднятой им таблички“. У мудрецов есть ровно сутки, чтобы придумать, как справиться с головоломкой короля. Могут ли они гарантированно пройти испытание?

**8** В комнате странной многоугольной формы стоит свеча, причём ни одна из стен не освещена полностью. Нарисуйте пример такой комнаты.

## Ответы и комментарии

**1** Ответ. «Осталось» 10 углов

○ Как отпилили угол?

– В этой задаче имеется в виду, что отпилили пилой НЕБОЛЬШОЙ кусок деревянного кубика, ровно. Уголок рядом с вершиной. Случай, когда распил пересекает больше, чем через три ребра, рассматривать не требуется (хотя, если вы хотите, то можете обсудить с детьми и их).

○ Ребёнок говорит, например, что было 6 углов, а осталось 5.

– Можно посоветовать ему нарисовать, а для начала — представить куб (вспомни, как выглядит аквариум, кусок сахара, . . .)

– Годится и решение «вот рисунок, считаю пальцем: раз-два-три- . . . -десять», и решение «было 8 углов, т.к. четыре на дне и четыре наверху (на крышке), когда мы отпиливаем, образуется три новых угла, а один отпиливается, значит, число углов увеличивается на 2»

**2** Ответ. Добрыня Никитич.

– Важно, чтобы ребёнок не только показал, что ответ «Добрыня Никитич» подходит, но и доказал, что только он-то и мог убить змея, что по-другому быть не могло.

○ А точно Добрыня? А например Алёша не мог убить? Проверь!

– Решение (прямым перебором). Если убил Добрыня, то прав только Илья — подходит. Если убил Илья, то никто не прав — не подходит. Если Алёша, то правы Добрыня и Алёша — не подходит.

**3** Ответ. 14 столбов

– Нужно рисовать треугольник и расставлять столбы. При этом ребёнку легче всего, видимо, посчитать пальцем.

– «Умное решение» состоит в том, что форма замкнутого забора неважна — раз его периметр равен 70 м, то столбов понадобится  $70 : 5 = 14$ . Но эта формула сама по себе ещё не является решением задачи! Нужно объяснить, почему она даёт верный ответ. А для объяснения — проще всего нарисовать картинку.

**4** Ответ. Через 77 дней будет снова суббота, через 2014 четверг,

а 2014 назад понедельник.

– Через 7 дней будет явно суббота, и через 14, и через 21, и через 77. Потому что пройдёт целое число недель (11). Через 300 недель будет тоже суббота — это через 2100 дней, а нам нужно число поменьше — через 2009 дней тоже будет суббота (это можно проверить, поделив в столбик), а значит через 2010 — воскресенье, через 2011 — пн, через 2012 — вт, через 2013 — ср, через 2014 — четверг!

– В вопросе про прошлое можно снова использовать 2009, либо 2016.

– Вообще, 2016 удобнее — оно ближе к 2014, отсчитывать быстрее. Но при делении в столбик мы получаем 2009, и чтобы перейти к 2016 — надо сообразить.

– Можно обратить внимание детей, что на прошлом занятии у нас чередовались Ани и Яны, каждые два номера было одно и то же имя. А теперь у нас каждые 7 дней один и тот же день недели. **НО МОЖНО** и не обсуждать это ни в какой момент, у нас ещё много чередования впереди, рано или поздно дети сами заметят аналогию между задачами.

**5** Ответ. Первому и второму: по два полных бочонка, два пустых и три половинки. А третьему оставшееся: три полных, три пустых и одна половинка.

– Переливать мёд нельзя!

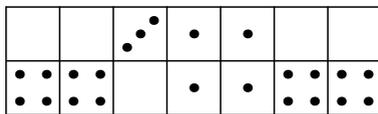
**6**

– Предполагается, что одинаковых костяшек в коробке нет! Это доминошки только из одного набора.

– Требуется не только нарисовать границы между доминошками, но и доказать, что они не могут проходить по-другому.

– Удобно начать с левого края, если бы две левые клетки были накрыты одной доминошкой 0-4, то вторая слева клетка в нижнем ряду тоже обязательно была бы покрыта доминошкой 0-4, т.е. было бы две одинаковых доминошки, что невозможно. Значит, слева лежат две горизонтальные доминошки 0-0 и 4-4. ТОГДА на правом конце стоит вертикальная доминошка 0-4, а левее неё — две

горизонтальных. Теперь осталось чуть-чуть!



**7** *Ответ.* Могут. Нужно, например, договориться, что посмотрев на колпак товарища, первый мудрец покажет табличку того цвета, который он увидит, а второй мудрец — противоположного цвета, чем увидит он.

– Мудрецы должны договориться, как им действовать, причём таким образом, чтобы они в результате **ТОЧНО** прошли испытание.

– Нужно объяснить, как должны действовать мудрецы, и доказать, что при таком способе они **ТОЧНО** выигрывают.

**8**

– Это сложная задача. Естественно, дети начинают говорить, что «это невозможно». Но — пусть попытаются!

○ Что значит «освещена»?

– Точка освещена, если на прямой дороге (отрезке) от свечи до этой точки нет преград (стен).

○ Разрешены ли частично освещённые стены?

– Давайте ещё раз прочитаем условие. «...ни одна из стен не освещена полностью». Значит, запрещаются полностью освещённые стены (у которых все точки освещены). А про не полностью освещённые ничего не говорится, значит, они разрешены!

## Листок 3

**1** Два мальчика играют на гитарах, а один — на балалайке. Миша с Петей играют на разных инструментах, Петя с Юрой — тоже. На чём играет Миша?

**2** Запах от цветущего кустика ландышей распространяется в радиусе 20 м вокруг него. Сколько цветущих кустиков ландышей необходимо посадить вдоль прямолинейной километровой аллеи, чтобы по всей её длине пахло ландышем?

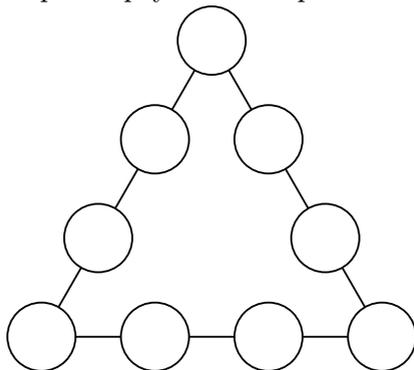
**3** На дворе осень. Какое время года будет

а) через 240 месяцев?

б) через 999 месяцев?

в) через 1000 месяцев?

**4** Расставьте числа 1, 2, 3, ..., 9 в кружочках так, чтобы сумма чисел на каждой стороне треугольника равнялась 17.



**5** Маша и Паша хотели купить по букварю, но Маше не хватало для покупки семи копеек, а Паше — одной копейки. Тогда они решили сложить свои деньги и купить один букварь на двоих, но денег всё равно не хватило. Сколько стоил букварь?

**6** У подводного царя служат осьминоги с шестью, семью или восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда лгут, а у кого 6 или 8 ног, всегда говорят правду. Встретились 4 осьминога. Синий сказал: „Вместе у нас 28 ног“, зелёный: „Вместе у нас 27 ног“, жёлтый: „Вместе у нас 26 ног“, красный: „Вместе у нас 25 ног“. У кого сколько ног?

## Дополнительные задачи

**7** В тёмной комнате на столе лежат 12 монет. Известно, что 6 из них лежат вверх орлом, остальные решкой. Вы можете переворачивать монеты, однако не можете на ощупь отличить орёл от решки. Как разделить монеты на две одинаковые группы так, чтобы в них было равное число монет, лежащих вверх орлом?

**8** Как на стол поставить **а)** как можно меньше, **б)** ровно 8 одинаковых кубиков так, чтобы полностью были видны ровно 23 грани кубиков, а остальные грани видны не были? Смотреть можно со всех сторон! Грань *не видна* только в случае, если она соприкасается с другой гранью или со столом.

## Ответы и комментарии

**1** *Ответ.* На гитаре. Всего есть три разных пары мальчиков, и какая-то пара мальчиков играет на одинаковых инструментах, — это может быть только оставшаяся пара — Миша и Юра.

– *Есть ещё много других решений.*

– *Задача простая, поэтому стоит потребовать самостоятельных, чётких и внятных рассуждений!*

**2** *Ответ.* 25 кустиков

○ Ребёнок говорит, что мы должны ставить кустики на расстоянии 20 м друг от друга

– *Давай нарисуем, два кустика, пусть расстояние между ними 30 м, ты говоришь, что какая-то точка между ними останется без запаха. Покажи, какая?*

– *А почему ты считаешь, что мы должны обязательно посадить кустик в самом начале и в самом конце аллеи?*

○ Ребёнок понял, как нужно расставлять кустики, но не может посчитать их количество

– *Посоветуйте посчитать сначала для аллеи покороче, например, для аллеи в 200 м*

**3** *Ответ.* а) осень, б) через 996 будет осень, а через 999 — зима, в) а через 1000 — либо продолжится зима, либо наступит весна

– *Задача продолжает тему про дни недели*

– *Нужно требовать объяснения, почему через 1000 месяцев может быть как зима так и весна, а вот лето и осень никак не могут быть*

**4** – *В этой задаче ничего не нужно объяснять, в том числе не нужно объяснять, как ты догадался до ответа — догадался и всё тут, молодец!*

– *Есть следующие соображения, которые можно (но совсем не обязательно!) обсудить на кружке (например, у доски в конце занятия). Итак, чему равна сумма всех чисел от 1 до 9? Правильно, 45. А нам сказано, что на каждой стороне должна быть сумма 17, то есть всего на трёх сторонах — 51. Но 51 больше 45, как*

*это получилось? Ага, дело в том, что числа в угловых кружочках мы считаем дважды. То есть 51 — это сумма чисел на сторонах по одному разу и удвоенная сумма чисел в трёх углах. Какой вывод отсюда можно сделать? Что сумма чисел в углах равна шести! А значит, мы должны написать в углах какие числа? 1, 2 и 3! У всех ли в углах написаны эти числа? ...*

**5** *Ответ.* 7 копеек

– *Паше не хватало всего одной копейки — как же Маше удалось не помочь ему?*

– *Ага, если бы у Маши хоть одна копейка была, она бы выручила Пашу. Значит, у Маши нет ни одной копейки.*

**6** *Ответ.* У зелёного 6 ног, у остальных по семь

– *Есть много разных способов перебирать случаи в этой задаче, главное, решение должно содержать доказательство, что такое количество ног подходит и что любое другое количество ног не подойдёт*

– *Раз они все сказали разное, правду сказал максимум один из них.*

– *При этом вообще говоря может быть, что все соврали!*

– *Можно аккуратно рассмотреть случаи: 1) соврали все, тогда у них всех по 7 ног, т.е. всего 28 ног, чем это плохо? Тем, что тогда синий осьминог не врёт! 2) соврали трое, тогда у них 21 нога в сумме, а у оставшегося 6 или 8, то есть всего либо 27, либо 29, ответа «29» у нас нет, значит, прав зелёный осьминог.*

**7** – *Это довольно сложная задача.*

– *Разделите монеты как-нибудь на две группы по 6 монет. Может там поровну «орлов», может, нет — этого мы не знаем... и узнать в темноте никак не можем... что же делать? что мы можем сделать?! Только — перевернуть монеты... Давайте перевернём ВСЕ монеты в одной из двух групп! И хорошенько подучаем.*

– *Если разбирать эту задачу, можно провести эксперимент с настоящими монетами.*

**8** *Ответ.* а) наименьшее число кубиков равно пяти

– *Обязательно нужно требовать доказательство в пункте а),*

*что меньшим числом кубиков не обойтись.*

*– Подходит, например, такое рассуждение. У каждого кубика всего 6 граней, на одной он стоит, значит, видно максимум 5. Если кубиков четыре или меньше, то граней видно 20 или меньше, а нам нужно 23 — не хватает.*

## Листок 4

**1** а) На столе лежат три яблока весом 200 г, 300 г и 400 г. Малыш, а затем Карлсон берут по яблоку и одновременно начинают их есть (с одинаковой скоростью). Тот, кто доел своё яблоко, берёт следующее; каждый хочет съесть как можно больше. Какое яблоко выбрать Малышу вначале? б) А если есть ещё яблоко весом 450 г?

**2** В городе живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Рыцари носят с собой шпагу, а лжецы — нет. Собрались вместе два рыцаря и два лжеца и посмотрели друг на друга. Кто из них мог сказать фразу: а) «Я рыцарь»; б) «Среди нас все рыцари»; в) «Среди вас есть ровно один рыцарь»; г) «Среди вас есть ровно два рыцаря»?

**3** Малыш спрятал от Карлсона банку с вареньем в одну из трех разноцветных коробок. На коробках Малыш сделал надписи: на красной — «Здесь варенья нет»; на синей — «Варенье — здесь»; на зелёной — «Варенье — в синей коробке». Известно, что только одна из этих надписей правдива. В какой коробке Малыш спрятал варенье?

**4** На бесконечной тропинке через каждый дюйм нарисована метка. На одной из отметок сидит хромой кузнечик, который умеет прыгать влево на 7 дюймов, а вправо — на 4 дюйма. а) Как кузнечику перепрыгнуть на одно деление правее? б) Как кузнечику перепрыгнуть на одно деление левее? в) Докажите, что кузнечик сможет допрыгать до любой отметки.

**5** В ряд высадили 12 деревьев. Затем между каждыми двумя посаженными деревьями посадили еще по одному дереву. Затем эту операцию проделали еще 3 раза. Сколько всего деревьев посажено?

**6** а) Нарисуйте фигуру из чётного числа клеточек, которую нельзя разрезать на «доминошки» (прямоугольники из двух клеток).

б) Оказывается, можно придумать такую фигуру, которую нельзя разрезать на доминошки, но если к ней пририсовать одну доминошку — получившуюся фигуру уже можно будет разрезать на доминошки. Нарисуйте пример такой фигуры (она не должна рас-

падаться на части), пририсуйте к ней доминошку (заштрихуйте её) и покажите, как разрезать полученную фигуру на доминошки.

**в)** Какое наименьшее число клеток может быть в фигуре из пункта **б)**?

### Дополнительные задачи

**7** Составьте из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 магический квадрат, то есть разместите их в таблице  $3 \times 3$  так, чтобы суммы чисел по строкам, столбцам и двум диагоналям были одинаковы.

**8** Одноклассники Аня, Боря и Вася живут на одной лестничной клетке. В школу они идут с постоянными, но различными скоростями, не оглядываясь и не дожидаясь друг друга. Но если кто-то из них успевает догнать другого, то дальше он замедляется, чтобы идти вместе с тем, кого догнал. Однажды первой вышла Аня, вторым Боря, третьим Вася, и какие-то двое из них пришли в школу вместе. На следующий день первым вышел Вася, вторым Боря, третьей Аня. Могут ли все трое прийти в школу вместе?

## Ответы и комментарии

**1** *Ответ.* а) 200 г, б) 300 г

○ Ребёнок говорит: понятно, что это самое выгодное

– *Нужно добиться объяснения, почему*

– *Почему так выгоднее всего? а если взять другое яблоко? – Тогда Карлсон может вот так поступить:.....! – Ага, верно, а если вот такое? – Тогда Карлсон свест..... – Да, действительно, молодец, плюсики.*

**2** *Ответ.* а) кто угодно, б) только лжец, в) кто угодно, г) никто.

○ в пункте (в) обратите внимание на слова «среди ВАС»

– *(а) Ты говоришь, что тебе кажется, что это сказал рыцарь? Почему? Потому что это будет тогда правдой? Ага, да. А лжец мог такое сказать? Почему?*

– *И так далее.*

**3** *Ответ.* В зелёной коробке.

○ Ребёнок говорит, что варенье в синей коробке, что он в этом уверен, или ему так кажется, или ещё почему-то.

– *Давай прочтём условие, что тут сказано? Ровно одна надпись должна быть правдива. Какие надписи правдивы, если варенье действительно лежит в синей коробке?... Сколько получается правдивых надписей? А сколько нужно?*

– *Решение состоит в переборе трёх вариантов нахождения варенья.*

**4** – *В пунктах а) и б) годится любой правильный способ.*

**5** *Ответ.*  $177 = 12 + 11 + 22 + (12 + 11 + 22 - 1) + 88 = 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 12 - 1) - 1) - 1) - 1$ .

**6** *Ответ.* в) 8 клеточек.

– *Доказать, что меньше 8 клеточек нельзя – трудно. Можно не останавливаться на этом подробно, а просто поздравить тех участников кружка, кому удастся сделать меньше всех!*

**7** – *Комментарии к этой задаче аналогичны комментариям к задаче 4 из третьего листка.*

**8** *Ответ.* Могут.

## Листок 5

**1** На деревянной линейке отмечены только три деления: 0, 7 и 11 см. Отложите с её помощью отрезок **а)** какой-нибудь длины, отличной от семи и одиннадцати сантиметров; **б)** 8 см; **в)** 5 см.

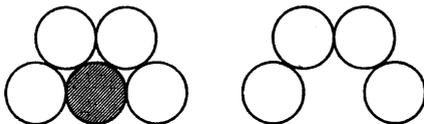
**2** Малышу подарили игрушечного робота. Малыш включил его и долго наблюдал. Вот что он заметил: 1) Если сейчас робот кивает, то через минуту он моргает. 2) Если сейчас робот топает, то через минуту он хлопает. 3) Если сейчас робот пищит, то через минуту он кивает. 4) Если сейчас робот трещит, то через минуту он пищит. 5) Если сейчас робот моргает, то через минуту он топает. 6) Если сейчас робот хлопает, то через минуту он трещит. Сейчас робот пищит. Что он будет делать через 10 минут? а через час?

**3** По кругу стоят 12 детей. Мальчики всегда говорят правду мальчикам и врут девочкам, а девочки всегда говорят правду девочкам и врут мальчикам. Каждый из них сказал одну фразу своему соседу справа: «Ты — мальчик» или «Ты — девочка», причём первую из этих фраз сказали ровно 7 детей. Сколько девочек среди детей?

**4** Карлсон загадал число от 1 до 8, а Малыш пытается его угадать. Он задаёт Карлсону вопросы, на которые тот отвечает только «ДА» или «НЕТ». Как Малышу отгадать число за три вопроса?

**5** Шёл суд по делу об украденной муке. Обвиняемых было трое: Болванщик, Мартовский Заяц и Соня. Мартовский Заяц заявил, что вор — Болванщик; Болванщик и Соня тоже дали свои показания, которые, однако, не были записаны. Суд также установил, что только один из обвиняемых украл муку, и лишь этот обвиняемый сказал правду. Кто украл муку?

**6** Легко расположить на столе пять одинаковых монет, как показано на рисунке слева. Заберём одну монету (заштрихованную), а остальные смешаем. Не используя ничего, кроме этих четырёх монет, расположите их так, как показано на рисунке справа.



### Дополнительные задачи

**7** Какое наибольшее число брусков размером  $1 \times 2 \times 2$  можно разместить (без пересечений) в кубе  $3 \times 3 \times 3$ ?

**8** Зайцы распилили несколько бревен. Они сделали 10 распилов и получили 16 чурбачков. Можно ли точно сказать, сколько брёвен они распилили?

## Ответы и комментарии

**1** – Это в точности задача про кузнечика из прошлого листочка. Но об этом не нужно говорить сразу, а можно и вообще об этом не говорить. Может быть, кто-то из детей сам заметит!

**2** Ответ. Через 10 минут будет хлопать, а через час — пицать.  
– Из наблюдений вытекает такая последовательность: **Хло–Тре–Пиц–Кив–Мор–Топ–Хло**. Значит, раз сейчас робот Пицтит, то через 6 минут он будет снова пицать, и через 12 тоже, и через 60 — тоже.

**3** Ответ. 5 девочек.  
– Может ли кому-то мальчик сказать фразу «Ты — девочка»? Кому? Проверяем... не может!

**4** Ответ. Есть разные способы.  
– Главное, чтобы алгоритм **гарантировал** угадывание задуманного числа за три вопроса.

**5** Ответ. Соня.  
– Комментарии аналогичны комментариям к задачам про богатырей (№2 из второго листка), про варенье в разноцветных коробках (№3 из четвёртого листка), см. также задачу про осьминогов (№6 из третьего листка)  
– Если вы раньше не разбирали богатырей, варенье или осьминогов, может быть уместно обсудить решение одной или нескольких из этих задач в начале сегодняшнего занятия.

**6** – Нужно расположить монеты в точности так, а не «примерно так»  
– Единственная существенная разрешённая операция — прикладывание монет друг к другу «вплотную»

**7** Ответ. Шесть.  
– Легко доказать, что больше шести нельзя (семь брусков заняли бы 28 кубиков, а у нас их только 27)  
– Но отсюда ещё не следует, что ответ 6. А вдруг и шесть тоже нельзя?

– *Пример расположения шести брусков построить непросто.*

**8** *Ответ.* Можно: шесть.

○ Ребёнок говорит, что он пять брёвен режет пополам, а шестое бревно режет пятью распилами на 5 частей, и получает как раз 10 распилов и 16 чурбачков.

– *А может быть 7 брёвен тоже можно так распилить? Или пять брёвен. Почему именно шесть? Нужно доказать!*

– *Нужно вспомнить, что происходит с разницей между числом распилов и чурбачков при распиливании одного бревна.*

## Листок 6

**1** Иван Иванович купил собаку. Саша думает, что эта собака — чёрный пудель, Паша считает ее белой болонкой, а Маша — белым бультерьером. Известно, что каждый из ребят верно угадал либо породу, либо цвет шерсти собаки. Назовите породу собаки и цвет её шерсти.

**2** а) Можно ли сложить бумажный квадрат так, чтобы затем одним взмахом ножниц разрезать его на 4 квадратика?

б) А на 9 квадратиков?

**3** На батоне колбасы нарисованы тонкие поперечные кольца. Если разрезать по красным кольцам, получится 5 кусков, если по жёлтым — 7 кусков, а если по зелёным — 11 кусков. Сколько кусков колбасы получится, если разрезать по кольцам всех трёх цветов?

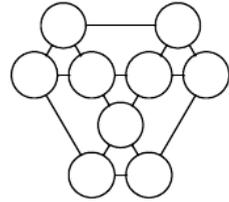
**4** Ваня пошёл с папой в тир. Уговор был такой: Ване даются 10 патронов, и за каждое попадание в цель он получает ещё три патрона. Ваня сделал 14 выстрелов и ровно в половине из них он попал в цель. Сколько патронов осталось у Вани?

**5** На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Островитянин Ой сказал своим друзьям: «Вчера мой сосед заявил мне, что он лжец!» Сможете ли вы определить, кем является Ой — рыцарем или лжецом?

**6** На линейке длиной 9 см нет делений. Нанесите на неё три промежуточных деления так, чтобы ею можно отмерить любое целое число сантиметров от 1 до 9 включительно.

### Дополнительные задачи

**7** Впишите в кружки на рисунке числа от 1 до 9 так, чтобы суммы чисел, стоящих в вершинах каждого из семи равносторонних треугольников, были равны.



**8** На доске записано число 61. Каждую минуту число стирают с доски и записывают на это место произведение его цифр, увеличенное на 13. Например, через минуту на доске запишут значение выражения  $6 \cdot 1 + 13$ , то есть 19. Какое число будет на доске через 10 минут? а через 100 минут?

## Ответы и комментарии

**1** *Ответ.* Можно, и то, и другое.

– Нужно нарисовать квадрат, линии сгиба и линию разреза и показать, куда этот разрез накладывается и объяснить, почему он не разрежет ничего лишнего.

**2** *Ответ.* 21 кусок.

– Сколько красных колец? Четыре. Сколько жёлтых? Шесть, а зелёных — десять. Всего колец получается 20, а кусков, значит, будет 21.

– Рисунок разноцветными карандашами и подсчёт 21 куска пальцем — это здорово, но остаются вопросы.

– В случае с твоей колбасой получился 21 кусок, а у них там в задаче, может быть, была другая колбаса? И ответ другой?

– Почему ты нарисовал именно четыре красных кольца? Ага, значит, их обязательно должно быть четыре? Давай это запишем, так...

**3** *Ответ.* 17 патронов.

**4** *Ответ.* Ой — лжец.

– Оставим пока Ой-я в покое — давайте задумаемся, кем является его сосед?

**5** *Ответ.* Например, подойдёт разбиение линейки на части  $9=1+3+3+2$ .

– Края линейки можно использовать.

– Отмерить — значит отмерить одним прикладыванием (т.е. нельзя нарисовать 1 см и его откладывать).

– О, ты нанёс деления, объясни, как теперь отмерить 1 см? а 2 см? Да, разумеется, мы должны проверить, что твоя линейка удовлетворяет всем условиям задачи, а то вдруг ты где-то ошибся?

**6** – Комментарии аналогичны задаче 4 из листочка 3.

**7** *Ответ.* Через 10 минут будет число 17, через 100 минут — тоже 17.

– Не будем лениться и попытаемся что-то изобрести – выпишем числа, через 1 минуту – 19, через 2 – 22, через 3 – 17, через 4 – 20, через 5 – 13, через 6 – 16, через 7 – 19. Ой! 19 уже было, значит, будет повторяться?

○ Как понять, через сколько шагов числа повторяются?

– Через 1 минуту и через семь – 19, т.е. ещё через 6 минут снова будет 19...

## Листок 7

**1** Три ёжика делили три кусочка сыра массами 5 г, 8 г и 11 г. Лиса стала им помогать. Она может от любых двух кусочков одновременно отрезать и съесть по 1 г сыра. Сможет ли лиса оставить ёжикам равные кусочки сыра?

**2** — У Вовы больше тысячи книг, — сказал Ваня.  
— Нет, книг у него меньше тысячи, — возразила Аня.

— Одна-то книга у него наверняка есть, — сказала Таня.

Сколько книг может быть у Вовы, если истинно ровно одно из этих утверждений?

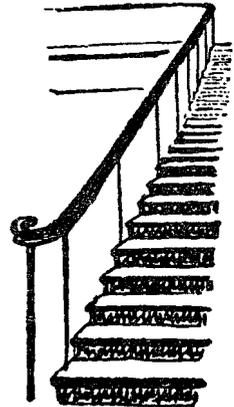
**3** Ваня с папой снова пошли в тир. Уговор был прежний: Ване даются 10 патронов, и за каждое попадание в цель он получает ещё три патрона. На этот раз Ваня стрелял, пока патроны не кончились, и сделал всего 34 выстрела. Сколько раз он попал в цель?

**4** Деревянный куб покрасили снаружи белой краской, каждое его ребро разделили на 4 равные части, после чего куб распилили так, что получились маленькие кубики, у которых ребро в 4 раза меньше, чем у исходного куба.

- а) Сколько получилось маленьких кубиков?
- б) Сколько из них с одной окрашенной гранью?
- в) Сколько из них с двумя окрашенными гранями?
- г) Сколько из них с тремя окрашенными гранями?
- д) Сколько из них неокрашенных?

**5** Очень хитрый киоскёр получил для продажи несколько пачек конвертов по 100 конвертов в каждой. 10 конвертов он отсчитывает за 10 секунд. Оказалось, что 70 конвертов он отсчитывает быстрее, чем 40. Как? А за сколько секунд он может отсчитать 360 конвертов?

**6** Подсчитайте *точно*, сколько ступенек у лестницы на рисунке справа.



## Дополнительные задачи

**7** У куба шесть граней, и все они — квадраты. Придумайте другой многогранник, все грани которого — одинаковые квадраты.

**8** Лёша выдал Паше и Ване по карточке. На каждой карточке написано натуральное число, причём Лёша утверждает, что эти числа отличаются на единицу, и просит ребят определить эти числа. Каждый из них посмотрел на свою карточку, но не показал её соседу. После чего они начали беседу.

Паша: „Я не знаю твоё число“.

Ваня: „Я тоже не знаю твоё число“.

Паша: „Я тоже не знаю твоё число“.

После ещё ста точно таких же реплик Ваня сказал, что знает число Паши. Какие числа были написаны на карточках?

## Ответы и комментарии

**1** Три ёжика делили три кусочка сыра массами 5 г, 8 г и 11 г. Лиса стала им помогать. Она может от любых двух кусочков одновременно отрезать и съесть по 1 г сыра. Сможет ли лиса оставить ёжикам равные кусочки сыра? *Ответ.* Сможет.

– *Решение удобно записать в виде таблички из трёх столбцов, по одному на каждый (постепенно уменьшающийся) кусочек сыра.*

**2** *Ответ.* Либо ноль, либо тысяча книг.

– *В первом случае верно только третье утверждение, во втором — только второе. Если верно первое, то верно и третье, что невозможно по условию.*

○ Школьник потерял ответ «ноль».

– *После того, как вы с ребёнком убедились, что 1000 подходит, нужно требовать доказательство, что других ответов нет.*

○ *Зачем? Вот, я же нашёл, тысяча книг!*

– *Ну смотри, ребята что-то там говорили, да к тому же вралли,*

– *может, данных задачи недостаточно, чтобы однозначно определить, сколько у Вовы книг?*

○ *Нет, достаточно, сейчас я вам покажу!...*

– *Если хочется сильно подсказать на этом этапе, можно спросить, а кто из детей вообще может быть прав? Вот у тебя была права Таня, а вдруг кто-то другой?*

– *Если хочется подсказать на нулевом этапе, можно спросить, как думает ребёнок, если у Вовы 1 книга, то какие утверждения верны, а какие нет? почему?*

**3** *Ответ.* 8 раз.

○ *«Вот, посмотрите, Ваня сначала попал и заработал три патрона, потом дважды промахнулся, потом . . . , я всё расписал и у меня получилось 8 попаданий, а по-другому никак!»*

– *Как обычно, уточняем, почему же по-другому никак, и добиваемся доказательства, что попаданий было именно 8.*

– *Раз папа дал 10 патронов, а всего использовано 34, значит, 24 патрона Ваня заработал собственными попаданиями, по три па-*

*трона на попадание. . .*

**4** Очень хитрый киоскёр получил для продажи несколько пачек конвертов по 100 конвертов в каждой. 10 конвертов он отсчитывает за 10 секунд. Оказалось, что 70 конвертов он отсчитывает быстрее, чем 40. Как? А за сколько секунд он может отсчитать 360 конвертов? *Ответ.* Он отсчитывает 30 конвертов из пачки и берёт остальные 70, не считая. 360 конвертов он отсчитает за 40 секунд, если считать, что ещё три пачки конвертов он возьмёт мгновенно.

**5** *Ответ.* 29 ступенек.

– Видно, что у между опорами перил 7 пролётов, первая опора стоит на первой ступеньке, вторая опора — на пятой ступеньке, а восьмая — на последней.

– Теперь нарисуй в тетради, как выглядит лестница!

– Семь пролётов по четыре ступеньки, да ещё последняя ступенька.

**6** *Ответ.* Посмотрите на рисунок к следующему занятию.

– Можно собрать из кубиков и более сложные подходящие конструкции.

**7** *Ответ.* 104 и 105.

– Первым ходом Паша как бы говорит: «у меня не 1», а Ваня отвечает: «у меня не 2», и так далее.

## Листок 8

**1** Мартышка, Осёл и Козёл затеяли сыграть трио. Уселись чинно в ряд, Мартышка справа. Ударили в смычки, дерут, а толку нет. Поменялись местами, при этом Осёл оказался в центре. А трио всё нейдёт на лад. Пересели ещё раз. При этом оказалось, что каждый из трёх «музыкантов» успел посидеть и слева, и справа, и в центре. Кто где сидел на третий раз?

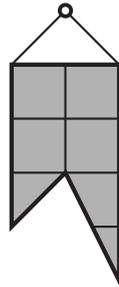
**2** У паузаса, не умеющего считать, есть мешок кокосовых орехов. Путешественник Миклухо-Маклай предлагает ему обменять этот мешок на коробок спичек, утверждая, что спичек в коробке больше, чем кокосов в мешке. Как паузасу проверить, не обманывает ли его Маклай?

**3** Есть маленькие песочные часы на три минуты и большие — на десять. Можно ли при помощи этих часов сварить яйцо, если для этого его требуется варить: **а)** ровно 19 минут; **б)** ровно 7 минут; **в)** ровно 4 минуты; **г)** ровно 5 минут, **д)** ровно 28 минут. **е)** Докажите, что с помощью этих часов можно отмерить любое целое число минут. (В какой момент начать варить яйцо, мы выбираем сами.)

**4** Железный Дровосек одним ударом топора разбивает любой чурбак или полено на три части. Он хочет разбить чурбак на 33 части. Сколько ударов ему понадобится?

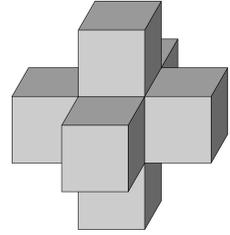
**5** Однажды в четверг после дождя между двумя жителями острова Рыцарей и лжецов Тимом и Томом произошёл следующий диалог. «Ты можешь сказать, что я рыцарь», — гордо заявил Тим. «Ты можешь сказать, что я лжец», — грустно ответил ему Том. Кем являются Тим и Том?

**6** В стене имеется маленькая дырочка (точка). У хозяина есть флажок, изображённый на рисунке справа. Покажите все точки, в которые можно вбить гвоздь так, чтобы флажок закрывал дырку.



### Дополнительные задачи

**7** Семь игральных кубиков сложили в фигурку, как показано на рисунке. При этом кубики прикладывали друг к другу гранями с одинаковым числом точек. Сколько всего точек на видимых гранях этой конструкции?



**8** Какое наименьшее число уголков из трёх клеток можно так расположить на доске  $8 \times 8$ , что ещё один уголок туда уже не влезет?

## Ответы и комментарии

**1** *Ответ.* Можно сначала менять один кокос на одну спичку, но получается, что обмен ещё до окончания проверки. Можно выложить в ряд, по парам — спичка–кокос. Но это много места займёт. Удобно взять ещё один мешок и коробочку и перекладывать по очереди, одна спичка, один кокос.

**2** – е) *Сколько минут легко отмерить? 10, 20, 30 и вообще заканчивающиеся на ноль — очень легко!*

– *Если число оканчивается на 3, или 6, или 9 — как отмерить?*

– *А что делать, если оканчивается на 7? как мы отмеряли 7 минут? А теперь 37 легко отмерить?*

– *И теперь смело перебираем все возможные последние цифры.*

**3** *Ответ.* 16 ударов

○ *«Каждым ударом на 3, всего 33, значит 11 ударов! Разве неправильно?»*

– *Пусть ты хочешь Получить 9 чурбачков, тогда, по-твоему, нужно три удара? Нарисуй!*

– *Каждый удар добавляет ДВА чурбачка.*

**4** *Ответ.* Тим лжец, а Том — рыцарь

– *Если первое высказывание — правда, то Тим — рыцарь, значит, тот, кто может сказать «Тим — рыцарь», сам должен быть рыцарем, и говорить только правду, а значит второе высказывание тоже правда, но как же может рыцарь Тим сказать про рыцаря Тома, что он лжец?! Противоречие, значит, Тим — лжец, и его высказывание — ложь, то есть Том не может сказать про Тима, что он рыцарь! А лжец так вполне мог бы сказать про лжеца. Значит, Том — не лжец, а рыцарь. Осталось для очистки совести проверить, что Том говорит правду — лжец Тим запросто может сказать про рыцаря Тома, что он лжец.*

**5** *Ответ.* Если вбить гвоздик в дырку, повесить флажок, а затем центрально-симметрично отразить флажок относительно дырки, то получится как раз искомое множество точек.

– *Нарисуйте, куда нужно вешать флажок, чтобы его углы попали*

точно на дырку.

– Если флажок, подвешенный в точке  $B$ , закрывает дырку  $A$ , то центрально симметричная относительно середины  $AB$  фигура закрывает точку  $B$  (и наоборот). Эта симметричная фигура всегда одна и та же (почему?) — она и будет ответом.

– Эту задачу интересно обсуждать с сильными старшеклассниками при обсуждении движений плоскости, но на кружке для 5–7 класса достаточно, чтобы ребёнок нарисовал правильную картинку и показал, как получаются границы найденной им области.

**6** Ответ. 105 точек.

– Сколько точек на поверхности одного кубика? 21.

– Сколько точек на семи кубиках?  $21 \cdot 7$ .

– Сколько из них не видны? Те, что на внутреннем кубике, и прилегающие к нему, т.е. ещё столько же, сколько на нём, —  $21 \cdot 2$ .

– Итак, остаётся  $21 \cdot 7 - 21 \cdot 2 = 21 \cdot 5 = 105$  точек.

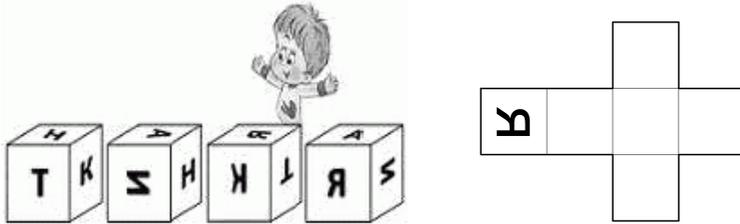
**7** Ответ. 11 уголков.

– Попробуем оценить, сколько уголков нам точно потребуется. Мысленно разделим нашу доску на 16 квадратиков  $2 \times 2$ . Понятно, что нам нужно, чтобы в каждом из этих 16 квадратиков хотя бы две клетки были закрыты уголками. Поэтому нам нужно накрыть хотя бы 32 клетки, а значит, 10 уголков не хватит.

– Чтобы показать, что 11 уголков хватит, нужно придумать и нарисовать пример. Это не очень просто.

## Листок 9

- 1 Сколько существует двузначных чисел? А трёхзначных? А 100-значных?
- 2 По двум телевизионным каналам одновременно начали показывать один и тот же фильм. На первом канале фильм разбили на части ровно по 20 минут каждая (длительность фильма в минутах нацело делилась на 20) и вставили между ними двухминутные рекламные паузы. А на втором канале фильм разбили на части ровно по 10 минут каждая и вставили между ними минутные рекламные паузы. На каком канале фильм закончится раньше?
- 3 Ребёнок поставил четыре одинаковых кубика так, что буквы на сторонах кубиков, обращённых к нему, образуют его имя (см. рисунок). Нарисуйте, как расположены остальные буквы на данной развёртке кубика, и определите, как зовут ребёнка.



- 4 Два мудреца написали на семи карточках числа от 1 до 7. После этого они перемешали карточки, первый мудрец взял себе три карточки, второй взял две, а оставшиеся они, не глядя, убрали в мешок. Изучив свои карточки, первый мудрец сказал второму: «Я знаю, что сумма чисел на твоих карточках чётна!» Какие числа написаны на карточках первого мудреца?
- 5 Вдоль дорожки между домиками Незнайки и Синеглазки росли в ряд цветы: 15 пионов и 15 тюльпанов вперемешку. Отправившись из дома в гости к Незнайке, Синеглазка поливала все цветы подряд. После 10-го тюльпана вода закончилась, и 10 цветов остались не политыми. Назавтра, отправившись из дома в гости к Синеглазке, Незнайка собирал для неё все цветы подряд. Сорвав 6-й тюльпан, он решил, что для букета достаточно. Сколько цветов осталось расти

вдоль дорожки?

**6** На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путник встретил троих островитян и спросил каждого из них: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?» Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий?

## Дополнительные задачи

**7** Бабе-Яге подарили большие песочные часы на 5 минут и маленькие — на 2 минуты. Зелье должно непрерывно кипеть ровно 8 минут. Когда оно закипело, весь песок в больших часах находился в нижней половине, а в маленьких — какая-то (неизвестная) часть песка в верхней, а остальная часть — в нижней половине. Помогите Бабе-Яге отмерить ровно 8 минут. (Песок все время сыплется с постоянной скоростью. На переворачивание время не тратится.)

**8** На гранях кубика расставлены числа от 1 до 6. Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырёх боковых гранях оказалась равна 12, во второй — 15. Что написано на грани, противоположной той, где написана цифра 3?

## Ответы и комментарии

**1** *Ответ.*  $99 - 9 = 90$ ;  $999 - 99 = 900$ ;  $9\underbrace{0\dots0}_{99}$

– На самом деле, не ошибиться здесь — сложно, и, скорее всего, стоит внимательно отнестись к обоснованию этой задачи.

**2** *Ответ.* На первом канале закончится на 1 минуту раньше.

– Нужно придумать рассуждение, не зависящее от продолжительности фильма.

– Можно представить себе длинную чёрную ленту, порезанную на кусочки по 10 см, с сантиметровыми белыми вставками. Можно поменять местами первый белый кусок со вторым чёрным, получится, что в начале 20 см чёрные, а потом 2 см белые. После этого следующей четвёрке «ЧБЧБ» проделать то же самое, и т.д. Постепенно лента второго канала переклеится в ленту первого канала, за тем исключением, что в самом конце будет тройка «ЧБЧ», вместо «ЧЧ» первого канала.

– Можно посчитать, используя наш опыт работы с чурбачками и кольцами на колбасе. Если на первом канале фильм длится  $20x$  минут, то рекламных пауз будет  $(x-1)$ , т.е. всего  $2(x-1)$  минут рекламы. На втором канале будет  $2x - 1$  минутных рекламных пауз, а это на 1 минуту больше.

**3** *Ответ.* НИКА.

**4** *Ответ.* Это могут быть только карточки 2, 4, 6.

**5** *Ответ.* Один.

– Можно аккуратно перебрать варианты, начиная, например, с вопроса, говорит ли первый правду или лжёт.

– Можно перебрать по числу рыцарей. Трое рыцарей — очевидно не подходит. Двое рыцарей подходит только в случае, если первый — лжец. Один рыцарь не подходит, поскольку если этот один рыцарь — второй, то он врёт, а если это не второй, то он, наоборот, говорит правду, хотя должен лгать. Ноль рыцарей не подходит, поскольку тогда первый говорит правду, а должен лгать.

**6** – Мы не знаем, сколько песка в верхней части!

- Мы не можем снять зелье с огня, не можем никак подготовить часы — нужно начинать измерение прямо сейчас!
- Задача похожа на задачу про 12 монет из третьего листочка, только здесь придётся сделать больше «переворачиваний».

**7** Ответ. 6.

- Чему равна сумма всех чисел на кубике? 21.
- Тогда в первый раз чему была равна сумма на нижней и верхней гранях? 9.
- А во второй раз чему была равна сумма на нижней и верхней гранях? 6.
- Как можно получить 9?  $9 = 4 + 5$ ,  $9 = 3 + 6$ , ещё возможны какие-то варианты? Нет.
- Если  $9 = 4 + 5$ , то шесть как получить?...

## Листок 10

**1** Коробейник купил на оптовом рынке партию ручек и предлагает покупателям либо одну ручку за 5 рублей, либо три ручки за 10 рублей, причём обе сделки приносят коробейнику одинаковую прибыль. Какова оптовая цена ручки?

**2** Можно ли двумя ударами топора разрубить подкову на шесть частей, если перемещать части после первого удара не разрешается?



**3** В трёх коробках лежат белые и чёрные шары: в одной — два белых, в другой — два чёрных, в третьей — белый и чёрный. На коробках наклеены таблички с надписями «ББ», «БЧ» и «ЧЧ», причём ни одна из них не соответствует содержимому. Можно ли, достав только один шар из одной коробки, определить, что находится в каждой из коробок?

**4** Кролик повесил в трёх углах своей многоугольной комнаты по лампочке, но оказалось, что не вся комната освещена. На помощь пришёл Винни-Пух: «Я могу перевесить одну лампочку в другой угол, и она одна осветит всю комнату, а две другие будут не нужны». Могло ли так быть?

**5** Расположите на плоскости 6 прямых и отметьте на них 7 точек так, чтобы на каждой прямой было отмечено 3 точки.

**6** Какое наименьшее количество распилов необходимо сделать, чтобы разрезать куб  $3 \times 3 \times 3$  на 27 единичных кубиков? (После каждого распила части можно перекладывать и пилить сразу несколько частей.)

## Дополнительные задачи

**7** В вершинах куба расставлены натуральные числа так, что числа в соседних (по ребру) вершинах отличаются не более чем на единицу. Докажите, что обязательно найдутся две диаметрально противоположные вершины, числа в которых отличаются не более чем на единицу.

**8** Скупой рыцарь хранит золотые монеты в 77 сундуках. Однажды, пересчитывая их, он заметил, что если открыть любые два сундука, то можно разложить лежащие в них монеты поровну по этим двум сундукам. Потом он заметил, что если открыть любые 3, или любые 4, ..., или любые 76 сундуков, то тоже можно так переложить лежащие в них монеты, что во всех открытых сундуках станет поровну монет. Тут ему почудился стук в дверь, и старый скряга не успел проверить, можно ли разложить все монеты поровну по всем 77 сундукам. Можно ли, не заглядывая в сундуки, дать точный ответ на этот вопрос?

## Ответы и комментарии

**1** Если вычесть первую сумму из второй, то получим цену двух ручек без торговой наценки (по условию она одинакова для обеих сделок). Значит, две ручки стоят 5 руб., а одна — 2 руб. 50 коп.

**2** *Ответ.* Можно.

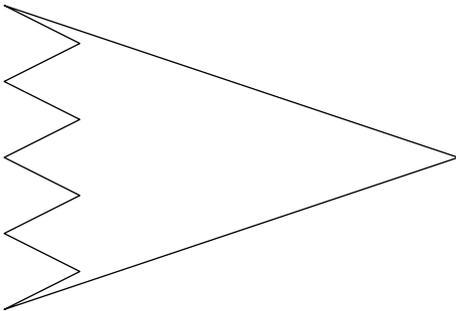


**3** *Ответ.* Можно.

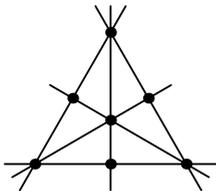
*Решение.* Поскольку надпись на коробке «БЧ» не соответствует действительности, в этой коробке два одинаковых шара. Вынув один из них, мы узнаем их цвет. Так, если этот шар белый, то в коробке «БЧ» два белых шара, тогда в коробке «ЧЧ» — чёрный и белый (потому что там не два белых и не два чёрных), в коробке «ББ» — два чёрных. Если шар чёрный, то симметрично: в «БЧ» два чёрных, в «ББ» — чёрный и белый, в «ЧЧ» — два белых.

**4** *Ответ.* Могло.

– *Попробуйте сделать форму комнату невыпуклой формы.*



5



**6** Как ни странно, возможность переключать кубики не помогает ускорить работу: все равно понадобится 6 распилов. Однако доказательство того, что меньшим числом обойтись нельзя, усложнится. Проще всего обосновать это так: чтобы разрезать большой куб на 27 маленьких, необходимо выпилить центральный кубик. Каждая его грань — это отдельный распил. Всего 6.

**7** *Подсказка.* Возьмите вершину, в которой стоит наименьшее из этих чисел, и посмотрите на соседние вершины.

**8** *Ответ.* Можно. *Решение.* Разделим сундуки на 11 групп по 7 сундуков в каждой. Общее количество монет в каждой группе сундуков должно делиться на 7, значит, на 7 делится и общее число монет во всех 77 сундуках. Разделим сундуки на 7 групп по 11 сундуков. Теперь число монет в каждой группе делится на 11, значит, общее число монет делится на 11. Итак, общее число монет делится на простые числа 7 и 11, а значит, делится и на их произведение 77. Следовательно, все монеты можно разложить поровну по 77 сундукам.

## Листок 11

**1** Кузнечик умеет прыгать вдоль заданной прямой на 6 см и на 8 см (в любую сторону). Сможет ли он за несколько прыжков попасть в точку, расстояние от которой до исходной равно: **а)** 4 см; **б)** 7 см?

**2 а)** Несколько кузнечиков сидят на одной прямой, причём расстояния между соседями — одинаковы. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика. Может ли через некоторое время кузнечик Саша оказаться на том месте, где в начале сидел его сосед Лёша?

**б)** Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика. Может ли через некоторое время кузнечик Саша оказаться на том месте, где в начале сидел кузнечик Лёша?

**3** Кузнечик прыгает на 1 сантиметр, потом прыгает на 3 сантиметра в том же или противоположном направлении, затем в том же или противоположном направлении на 5 сантиметров, и так далее. Может ли он после 25-го прыжка оказаться в исходной точке?

**4** Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика. Могут ли кузнечики в некоторый момент оказаться на одной прямой?

**5** Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика. Могут ли кузнечики в некоторый момент оказаться в вершинах квадрата большего размера?

**6** В трёх вершинах квадрата сидели кузнечики. Они стали играть в чехарду: один из кузнечиков прыгает в точку, симметричную относительно другого. Сможет ли хоть один кузнечик попасть в четвёртую вершину квадрата?

## Ответы и комментарии

**1** В пункте **а)** ответ «да»:  $4 = 6 + 6 - 8$ ; в пункте **б)** — «нет»: кузнечик прыгает всегда на чётное расстояние. Кстати, поскольку  $2 = 8 - 6$ , он любое чётное расстояние он преодолеть сможет (прыжок на 8 вперёд и на 6 назад эквивалентен прыжку на 2 вперёд).

**2** *Ответ.* «Нет» в обоих пунктах.

Раскрасим точки, в которых могут сидеть кузнечики, в шахматном порядке. Перепрыгивая через другого кузнечика, кузнечник не может поменять цвет своей точки; изначально Саша и Лёша сидели в точках разного цвета.

**3** *Ответ.* Нет.

Здесь тоже помогает шахматная раскраска.

**4** *Ответ.* Не могут.

Будем рассуждать от обратного: если кузнечики собрались на одной прямой, то, прыгая назад, они бы вернулись в вершины квадрата. Но, будучи на одной прямой, они не могут с неё сойти!

**5** *Ответ.* Не могут.

В этой задаче опять помогает соображение «от обратного».

**6** *Ответ.* Не сможет.

Здесь для двух кузнечиков опять поможет шахматная раскраска, а вот для третьего — раскраска в полосы белого и чёрного цвета.

## Листок 12

- 1 Пять парней за пять дней съели пять окуней. За сколько дней 15 парней съедят 15 окуней?
- 2 Разделите число 80 на две части так, чтобы одна часть составляла 60% другой части.
- 3 Барон Мюнхгаузен, вернувшись из кругосветного путешествия, рассказывает, что по пути он пересёк границу Трапезундии ровно 7 раз. Стоит ли доверять его словам?
- 4 В корзине лежат 30 грибов — рыжиков и груздей. Известно, что среди любых 12 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов хотя бы один — груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?
- 5 В стакан, в котором находятся 1000 бактерий, поместили один вирус. Каждую минуту происходит следующее: каждый вирус съедает одну бактерию, после чего каждый вирус делится на два вируса, а каждая бактерия — на две бактерии. Можно ли утверждать, что через некоторое время в стакане не останется ни одной бактерии?
- 6 На гранях кубика расставлены числа от 1 до 6. Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырех боковых гранях оказалась равна 12, во второй — 15. Какое число написано на грани, противоположной той, где написана цифра 3?

### Дополнительные задачи

**7** Вася задумал целое число. Коля умножил его не то на 5, не то на 6. Женя прибавил к результату Коли не то 5, не то 6. Саша отнял от результата Жени не то 5, не то 6. В итоге получилось 73. Какое число задумал Вася (перечислите все возможные варианты)?

**8** Какое наибольшее число полей можно отметить на шахматной доске так, чтобы с любого из них на любое другое отмеченное поле можно было пройти ровно двумя ходами коня?

## Ответы и комментарии

**1** Напрашивается ответ «15» — но нет! Пять парней за день съедают окуня. Значит, 15 парней съедят за день трёх окуней, а за 5 дней — и всех 15.

*Ответ.* За 5 дней.

**2** *Ответ.* 30 и 50.

**3** *Ответ.* Конечно нет!

*Решение.* 7 — нечётное число. Значит, 3 раза въехав и выехав из Траpezундии, при последнем пересечении границы барон бы остался там. А он, тем временем, перед нами.

**4** Посчитаем, сколько *не-рыжиков* и *не-груздей*. Не-рыжиков не больше 11 (12-й — уже рыжик), не-груздей — максимум 19. Поскольку  $11 + 19 = 30$ , не-рыжиков ровно 11, а не-груздей — 19.

*Ответ:* 11 груздей, 19 рыжиков.

**5** *Ответ.* Можно.

Самый элегантный способ это объяснить, пожалуй, такой: поскольку все обитатели стакана каждую минуту делятся надвое, можно считать, что весь стакан превращается в два новых одинаковых стакана. После второй минуты — в четыре, после третьей — в восемь, и так далее. Стаканов становится больше, однако в каждом стакане есть вирус, а число бактерий убывает по 1 за каждую минуту. Значит, в каждом стакане вирус победит, причём ровно за 1000 минут.

**6** — *Сумма чисел на всех гранях кубика равна 21.*

*Ответ.* 6.

**7** *Ответ.* 12.

**8** *Ответ.* 8 клеток.

## Листок 13

**1** У крестьянина были коза, корова, кобыла, стог сена и сын. Сын подсчитал, что сена хватит козе и кобыле на месяц, кобыле и корове на  $\frac{1}{3}$  месяца, а корове и козе — на  $\frac{3}{4}$  месяца. Отец похвалил мальчика, сказав, что он не зря учится в школе. Прав ли он?

**2** Может ли прямая пересекать все стороны **а)** 11-угольника; **б)** 10-угольника, при этом не проходя через его вершины?

**3** У кассира было 30 монет: 10, 15 и 20 копеек на сумму 5 рублей. Можно ли утверждать, что 20-копеечных монет у него было больше, чем 10-копеечных?

**4** На шахматной доске стоят ладьи так, что каждая из них бьёт  $N$  ладей. При каких  $N$  это возможно? (Ладья бьёт в каждом направлении только ближайшую ладью.)

**5** За круглым столом сидят 7 дипломатов. Они должны провести по одной беседе друг с другом. Два дипломата будут беседовать только в том случае, если они окажутся рядом. После того, как каждый из дипломатов закончил переговоры со своими соседями, дипломаты встают и занимают новые положения. С каким минимальным количеством пересаживаний может пройти встреча?

**6** Когда комиссия приехала в психбольницу, там находились 3 врача и 7 пациентов. Комиссия попросила каждого указать на двух врачей. Каждый врач показал на двух других, а пациенты показали на кого угодно. Докажите, что комиссия могла выявить хотя бы одного пациента. (Члены комиссии знают количество врачей и количество пациентов.)

## Дополнительные задачи

**7** Когда комиссия приехала в психбольницу, там находились 9 врачей и 49 пациентов. Комиссия попросила каждого указать на двух врачей. Каждый врач показал на двух других, а пациенты показали на кого угодно. Сможет ли комиссия выявить хотя бы одного пациента? (Члены комиссии знают количество врачей и количество пациентов.)

**8** Лиса и два медвежонка делят 100 конфет. Лиса раскладывает конфеты на три кучки; кому какая достанется — определяет жребий. Лиса знает, что если медвежатам достанется разное количество конфет, то они попросят её уравнять их кучки, и тогда она заберёт себе излишек из кучки медвежонка, которому досталось больше конфет. После этого все едят доставшиеся им конфеты. Придумайте, как Лисе разложить конфеты по кучкам так, чтобы съесть ровно 80 конфет (ни больше, ни меньше).

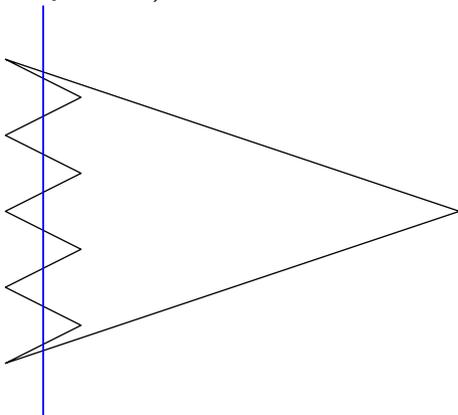
## Ответы и комментарии

**1** Неправ. Получается, что коза и кобыла съедают в месяц 1 стог, кобыла и корова — 3 стога. Значит, кобыла съедает не больше 1 стога, следовательно, корова — не менее 2 стогов. С другой стороны, даже вместе с козой она, как утверждает сын, съедает всего лишь  $\frac{4}{3}$  стога. Противоречие.

**2** В пункте **а)** ответ «не может». Покрасим внутреннюю часть многоугольника в чёрный цвет, а внешнюю часть плоскости — в белый. Каждый раз, когда прямая пересекает сторону  $n$ -угольника, она меняет цвет области, по которой проходит (потому что она не может «коснуться» многоугольника в вершине). Поскольку число сторон нечётно, то, начав пересекать их из белой области, она в конце концов пойдёт по чёрной — т.е. внутренняя область многоугольника окажется бесконечной. Противоречие.

Сравните эту задачу с задачей про барона Мюнхгаузена из предыдущего листочка.

В пункте **б)** ответ «может»:



**3** *Ответ.* Да, можно.

*Решение.* Если бы у кассира все монеты были бы 15-копеечными, то сумма была бы  $30 \cdot 15 = 450$  коп. = 4 руб. 50 коп. Замена 15-копеечной монеты на 10-копеечную монета уменьшает сумму на 5 коп., на 20-копеечную — увеличивает на 5 коп. Поскольку у кассира общая сумма больше, чем 4 руб. 50 коп., 20-копеечных монет

больше, чем 10-копеечных.

**4** *Ответ.* 0, 1, 2.

*Идея решения:* посмотрим на самую левую вертикаль, где есть ладья, и выберем на ней самую верхнюю ладью. Она может бить не более двух других ладей — значит, и остальные ладьи тоже (все бьют поровну).

– *Для значений 0, 1, 2 непременно надобно требовать примеры расстановки ладей!*

**5** *Ответ.* С тремя пересаживаниями.

*Решение.* Меньше трёх быть не может, так как всего бесед  $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ , а за один круглый стол пройдёт только 7 бесед. А три можно следующим образом: 1-2-3-4-5-6-7-1, 1-3-6-2-5-7-4-1, 1-5-3-7-2-4-6-1.

– *Без доказательства того, что двух пересаживаний не хватит, решение неполно!*

**6** Врачи непременно укажут друг на друга — однако, среди пациентов также может оказаться фальшивая «тройка врачей», т.е. 3 пациента, считающие друг друга врачами. Однако общее число пациентов не делится на 3, значит, найдётся пациент, в такую тройку не входящий. Его-то и выявит комиссия.

**7** А вот в этой задаче выявить хотя бы одного пациента не удастся. Например, врачи могут разбиться на группы в 5 и 4 человека, и указывать только на коллег из той же группы. Каждую такую группу легко сымитировать пациентам, а их число 49 представляется в виде  $9 \cdot 5 + 4$ , то есть разбивается на такие группы.

**8** Лиса раскладывает конфеты так: 10, 10 и 80. Если ей достанется кучка из 80 конфет, то медвежатам достанется поровну конфет, и они не будут жаловаться. Если ей достанется кучка из 10 конфет, то, для того чтобы уравнять доли медвежат, ей придётся съесть ещё 70 конфет.

# Игра «Математический аукцион»

## Правила математического аукциона

### *Основные правила*

**Ещё до начала занятия** детям можно выдавать маленькие листочки с идеей игры. Чтобы они морально готовились.

Команды 2–4 человека.

В начале выдаются или объявляются условия нескольких задач. По мере того, как задачи разыгрываются и закрываются, выдаются условия следующих задач. Периодически ведущий объявляет, что подходит к концу время, отведённое на решение некоторой задачи.

За право сдать/показать ответ нужно платить (как именно — см. ниже).

Предлагается два способа проводить аукцион, вы можете выбрать любой (или придумать свой). Первый способ азартнее, второй — проще.

### *Правила торгов, вариант 1. Настоящие торги*

Правила торгов разумно подобно объяснять детям не в начале игры, а в начале первых торгов.

В самом конце времени, отведённого на решение задач блока, все команды сдают свои ответы на листочках (они пригодятся позже в пункте 4).

Ведущий объявляет, что время на решение задач истекло, и начинаются торги. Торги ведутся отдельно по каждой задаче. Дети поднимают руку и выкрикивают ставки. В начале игры каждая команда обладает капиталом в 30 (условных) монет.

За право рассказать своё решение у доски необходимо заплатить, и решение рассказывает та команда, которая назначит наибольшую цену в процессе торгов. Эту цену команда платит за право рассказать своё решение. Представитель команды выходит к доске, а **вы сразу отмечаете на доске, что капитал команды уменьшился.**

После того, как вышедший к доске игрок объяснил свой пример, а ведущий и остальные игроки проверили, верен ли он, на доске записывается результат выступления. Затем объявляются новые

торги за право рассказать пример получше, и так далее, пока желающих улучшить достигнутое не останется.

После этого победителем раунда объявляется команда, построившая наилучший пример. Она получает назад **в удвоенном размере** монеты, уплаченные ею за право рассказать этот наилучший пример. То есть победившая команда **зарабатывает монеты в размере своей ставки**.

Если капитал команды не больше 5 монет (в том числе отрицательный), команда имеет право делать любые ставки от 1-ой до 5 монет.

### *Правила торгов, вариант 2. Дискретные гонки*

Во время решения задач блока каждые 2–3 минуты объявляется приём ответов по какой-то задаче. **Ответы сдаются в письменном виде на клочках бумаги.** *За каждый сданный ответ с команды снимается 1 балл.* Жюри проверяет ответы и объявляет командам, что наилучший на данный момент ответ такой-то, и записывает его на доску. Через несколько минут снова объявляется приём ответов по этой задаче, и так далее.

Через какое-то время объявляется, что осталось 5 минут и по каждой задаче ответы будут приниматься в последний раз.

*Победитель по задаче зарабатывает 7 баллов.*

### *Общий зачёт — одинаковый для обоих вариантов*

На доске ведётся табличка с результатами ВСЕХ команд по ВСЕМ задачам. В конце игры подсчитываются результаты, например, по такой схеме: за лучший результат по задаче [количество команд] баллов, за второй — на один балл меньше, и так далее. Если, например, третьих результатов несколько, то все они получают одинаковое число баллов.

## Правила для участников

*Команда* может состоять из двух, трёх или четырёх человек.

В каждой задаче нужно будет придумать пример с *как можно большим* или *как можно меньшим* значением чего-либо.

**Доказывать**, что ваш пример наибольший или наименьший, **сегодня не требуется!** Баллы за доказательство начисляются не будут!

*Важно проверять*, что ваш пример пусть и не наилучший, но **подходит под условие задачи!** Вы потеряете баллы, если сдадите неправильный пример.

*Победители* будут определяться в трёх номинациях: отдельно за победу в каждой задаче, в конце игры за наибольший капитал и в конце игры за суммарное число баллов по всем задачам.

## Задачи математического аукциона

**2014 = 55 - 5 · 5 - 5 - 5 - 5 - 5 : 5 + 5 + ... + 5 + 5.** Получите 2014, используя *как можно меньше* пятёрок (другие цифры использовать нельзя), и в любом количестве скобки и знаки +, -, ·, :. *В ответе помимо самого примера указывайте, сколько единиц вы использовали. В приведённом примере использовано 409 двоек.*

**На разные части.** Разрежьте квадрат  $9 \times 9$  на *как можно большее* число различных частей. Части, отличающиеся поворотом или переворачиванием, считаются одинаковыми.

**Цепочка из чисел.** Расставьте в строку *как можно больше различных двузначных* чисел так, чтобы в любой тройке подряд идущих сумма первых двух делилась на третью. Вот пример такой цепочки из трёхзначных чисел:

152, 348, 100, 224

здесь  $152 + 348 = 500$  — делится на 100, а  $348 + 100 = 448$  — делится на 224.

**Предложение из разных букв.** Составить предложение, состоящее из осмысленных слов, такое, чтобы буквы в нем не повторялись, и чтобы букв в предложении было *как можно больше*.

**Целое из дробей.** На доске написаны пять дробей:  $\frac{1}{3}$   $\frac{1}{3}$   $\frac{1}{3}$   $\frac{1}{3}$   $\frac{1}{3}$ . Разрешается расставлять между ними скобки и знаки арифметических действий (+, −, :, ×). Расставьте знаки так, чтобы получилось целое число. Получите таким способом *как можно больше* целых чисел.

**Кони бьют.** Расставьте *как можно меньше* коней на доске  $8 \times 8$  так, чтобы они били все чёрные клетки.

**Цепочка из слов.** Придумайте как можно более длинную цепочку различных слов русского языка (существительных в единственном числе, именительном падеже, нарицательных), в которой первые три буквы каждого следующего слова совпадали с последними тремя буквами предыдущего (например: корОЛЬ – ОЛЬха).

**Истерзанный квадрат.** Разрежьте квадрат семью прямолинейными разрезами так, чтобы среди получившихся в результате кусочков было *как можно больше* треугольников.

**Нечётные лады.** Расставьте на шахматной доске как можно большее число ладей так, чтобы каждая была нечётное число других.

## Ответы и комментарии

Ответы к задачам для проведения математического аукциона не нужны: от школьников не требуется получить *оптимальное* решение (найти которое может быть очень трудно, или вообще невозможно); нужно лишь, чтобы решения были *лучше конкурентов*. От проверяющих требуется внимательно проверять корректность предлагаемых школьниками решений.

# Игра «Расскажи другу»

## Правила игры

Играют команды по 3–5 человек. Сначала командам предлагаются первые 6 задач, примерно через 30–40 минут — остальные задачи.

Задачи в игре бывают двух типов.

- Есть задачи типа «только ответ». Ответ команды на такую задачу сдаётся на листочке и оценивается по системе «+5, если верно, и –2, если неверно».
- Есть задачи типа «решение устно». Их нужно сдавать устно, причём сдавать задачу обязательно должна прийти вся команда. Из состава команды случайным образом выбирается, кто будет сдавать задачу. Остальные игроки уходят на свои места и не имеют права подсказывать сдающему. Решение также оценивается по системе «+5 / –2» Таким образом, знать и понимать решение задачи требуется не только от решившего её игрока, но и от всех остальных членов команды.

Каждую задачу можно сдавать неограниченное число раз, вплоть до получения правильного ответа или решения. Побеждает команда, набравшая наибольшее число баллов; дополнительный показатель при разделённом первом месте — количество правильно решённых задач.

## Задачи

**1** (*Только ответ*) В каких из следующих примеров ответ чётен, а в каких — нечётен? Ответ нужно дать сразу про все примеры.

а)  $(20152015 - 999 \cdot 12345) \cdot 54321 + 337 \cdot 5294$ ;

б)  $1 + 2 + 3 + \dots + 1999$ ;

в)  $1000 - 131313 \cdot 7 + 76111 + 2015 - 2016 + 444 \cdot 3737$ ;

г)  $373737 : 7 + 127127127127127 : 13 + 20152015201520152015 : 3$  (автор задачи гарантирует, что всё делится без остатка).

**2** (*Только ответ*) На поляну прилетело 35 ворон. Неожиданно вороны взлетели и разделились на две стаи: одна стая уселась на ветви

старой берёзы, а другая — на ольху. Через некоторое время с берёзы на ольху перелетело 5 ворон, столько же ворон совсем улетело с берёзы, после чего на берёзе осталось вдвое больше ворон, чем на ольхе. Сколько ворон было в каждой из двух стай первоначально?

**3** (*Решение устно*) Знайка пришёл в гости к братьям-близнецам Винтику и Шпунтику, зная, что один из них никогда не говорит правду, и спросил одного из них: «Ты Винтик?» «Да,» — ответил тот. Когда Знайка спросил об этом же второго, то также получил ответ «да» или «нет». После этого Знайка сразу понял, кто Винтик, а кто Шпунтик. Кого же — первого или второго — звали Винтиком?

**4** (*Только ответ*) Сколько всего существует трёхзначных чисел?

**5** (*Только ответ*) Бурундуки Чип и Дейл должны запасти одинаковое количество орехов на зиму. После того, как Чип принес 120, а Дейл — 147 орехов, Чипу осталось запасти орехов в четыре раза больше, чем Дейлу. Сколько орехов должен запасти каждый из них?

**6** (*Решение устно*) На вечеринке собрались только лжецы и стали спорить, сколько же их собралось. Первый сказал: «Нас больше десяти!» Второй сказал: «Нас чётное число!» Третий сказал: «Слово, обозначающее наше количество, состоит меньше, чем из шести букв». Сколько же лжецов на вечеринке?

**7** (*Решение устно*) На занятие кружка каждый шестиклассник принёс с собой одну или несколько тетрадей в клеточку (в тетради либо 12, либо 18, либо 48 листов) и так случилось, что внутри каждой тетради все страницы одинаковые, хотя в разных тетрадках они могут быть и разными. Кирилл решил посчитать все клеточки, какие только есть у шестиклассников, и у него получилось 12072015 клеточек. Шестиклассники на том же позапрошлом занятии с помощью чётности объяснили Кириллу, что он ошибся. Но Кирилл, поразмышляв две недели, возразил, что он не ошибся, а дело в том, что некоторые шестиклассники вырывали из своих тетрадей листы, в том числе одинарные. Мог ли Кирилл всё-таки быть прав?

**8** (*Только ответ*) Второклассники Коля, Вася, Миша, Стёпа и Гриша по очереди верно решили пять примеров из таблицы умно-

жения. Каждый следующий мальчик получил ответ в полтора раза больше предыдущего. Какие числа умножал Стёпа?

**9** (*Только ответ*) На острове 7 озер, из каждого вытекает 3 реки и в каждое впадает 2 реки. Кроме того, пять рек берут начало в леднике на вершине горы. Реки впадают только в другое озеро или океан. Сколько рек впадает в океан?

**10** (*Решение устно*) В однокруговом футбольном турнире участвовали 32 команды, причём каждая сыграла с каждой по 1 матчу. Сколько всего матчей было сыграно?

**11** (*Только ответ*) У Юры есть калькулятор, который позволяет умножать число на 3, прибавлять к числу 3 или (если число делится на 3 нацело) делить на 3. Как на этом калькуляторе получить из числа 1 число 11?

**12** (*Решение устно*) Сумма двух целых чисел нечётна. Может ли частное от деления одного из них на другое быть нечётным числом?

**13** (*Только ответ*) На карточках были написаны числа 1, 2, 3, ..., 111. Ваня взял себя карточки с чётными номерами, а Таня — с нечётными. У кого из них сумма чисел на карточках получилась больше и на сколько?

**14** (*Решение устно*) В комнате 12 человек; некоторые из них честные, то есть всегда говорят правду, остальные всегда лгут. «Здесь нет ни одного честного человека,» — сказал первый. «Здесь не более одного честного человека,» — сказал второй. Третий сказал, что честных не более двух, четвёртый — что не более трёх, и так далее до двенадцатого, который сказал, что честных людей не более одиннадцати. Сколько честных людей в комнате на самом деле?

## Ответы и комментарии

**1** а) Н; б) Ч; в) Н; г) Н.

**2** 30 на берёзе, 5 на ольхе.

**3** Второго звали Винтиком. Если второй ответил «да», отличить их нельзя. Значит, второй ответил «нет». Осталось перебрать два случая: первый В., второй Ш., или наоборот. В первом случае оба близнеца сказали правду — это противоречит условию. Во втором случае оба солгали — а вот это не противоречит условию!

**4** 900.

**5** 156.

**6** По условию, все высказывания ложны, то есть: их десять или меньше; их нечётно; и в слове, обозначающем их количество, шесть букв или больше. Из первых двух условий подходят «три», «пять», «семь», «девять», и только «девять» удовлетворяет также третьему условию. Ответ: 9.

**7** Поскольку на каждом листе две одинаковых страницы, вырвали тоже чётное число клеток. Значит, Кирилл не мог быть прав.

**8** 6 и 9.

**9** 12 рек.

**10**  $16 \cdot 31 = 496$ .

**11** Например,  $((1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) + 3 + 3) : 3 = 11$  или  $(1 \cdot 3 + 3) : 3 + 3 + 3 + 3 = 11$ .

**12** Предположим, что так получилось. Раз сумма нечётна, то складывали чётное и нечётное числа. Нечётное разделить на чётное — нецелое, чётное разделить на нечётное — чётное. Противоречие. Ответ: не может.

**13** У Тани больше на 56.

**14** 6 человек. Решение опирается на соображение монотонности: если кто-то солгал, то и все предыдущие тоже солгали.

## Диагностическое занятие (личная олимпиада)

- 1 В ряд записаны числа: 15, 16, 17, ... , 39, 40. Сколько их всего?
- 2 Артур, Стёпа и Гриша стоят в круг и играют в мяч, пасуя его по часовой стрелке. Вначале мяч был у Артура и он сделал первый пас Стёпе. У кого он будет после 1001-го паса?
- 3 Как-то раз встретились два островитянина и один сказал другому: «По крайней мере один из нас — лжец». История умалчивает, ответил ли ему на это что-либо собеседник. Тем не менее, определите, кем являются оба.
- 4 Незнайка целую неделю вычислял, сколько получится, если перемножить сто двоек. Когда он закончил вычисления и показал результат Шпунтику, тот сразу сказал, что Незнайкин ответ неверен, поскольку оканчивается на 8. А на какую цифру должен оканчиваться правильный ответ?
- 5 У Миши есть машинка с прицепом, есть маленькая машинка и есть зелёная машинка без прицепа. У Вити есть машинка без прицепа и маленькая зелёная с прицепом, а у Коли — большая машинка и маленькая синяя с прицепом. Однажды Миша, Витя и Коля принесли с собой в детский сад по одной машинке и заметили, что эти машинки одинаковы. Машинку какого вида (по цвету, размеру и наличию прицепа) принесли мальчики в детский сад?
- 6 Инопланетянин со звезды Тау Кита, прилетев на Землю в понедельник, воскликнул: «А!». Во вторник он воскликнул: «АУ!», в среду — «АУУА!», в четверг — «АУУАУААУ!». Что он воскликнет в пятницу?
- 7 Расставьте крестики и нолики в квадрате  $5 \times 5$  так, чтобы в каждой строке, кроме, быть может, первой, крестиков было бы больше, чем ноликов, а в каждом столбце, кроме, быть может, последнего, ноликов было бы больше, чем крестиков.
- 8 Чебурашка не успел влезть в лифт на первом этаже дома и решил пойти по лестнице. На третий этаж он поднимается за 2 минуты. Сколько времени у него займет подъем до девятого этажа?

**9** В Лесогории живут только эльфы и гномы. Гномы врут, говоря про своё золото, а в остальных случаях говорят правду. Эльфы врут, говоря про гномов, а в остальных случаях говорят правду. Однажды два лесогорца сказали:

А: Всё моё золото я украл у Дракона.

Б: Ты врешь.

Определите, эльфом или гномом является каждый из них.

**10** В фотоателье залетели 50 птиц — 18 скворцов, 17 трясогузок и 15 дятлов. Каждый раз, как только фотограф щёлкнет затвором фотоаппарата, какая-то одна из птичек улетит (насовсем). Сколько кадров сможет сделать фотограф, чтобы быть уверенным: у него останется не меньше 11 птиц какого-то одного вида, и не меньше десяти — какого-то другого?

## Ответы и комментарии

Эта олимпиада может быть использована в качестве диагностической работы в конце предложенного курса из 15 занятий для оценки текущих навыков участников кружка. Форма проведения олимпиады может быть разной — тестовая (участники должны записать только ответы), либо письменная или устная олимпиада, где от участников требуется дать не только ответы, но и доказательства того, что ответы именно такие. Мы считаем вполне допустимой любую из этих форм — выбор за руководителем кружка.

- 1** 26 чисел.
- 2** У Гриши.
- 3** Первый — рыцарь, второй — лжец.
- 4** На цифру 6.
- 5** Большая зелёная без прицепа.
- 6** АУУАУААУУААУАУА!
- 7** Существует несколько примеров (нужно внимательно проверять на соответствие условию).
- 8** 8 минут.
- 9** Оба гномы.
- 10** Не больше 13.