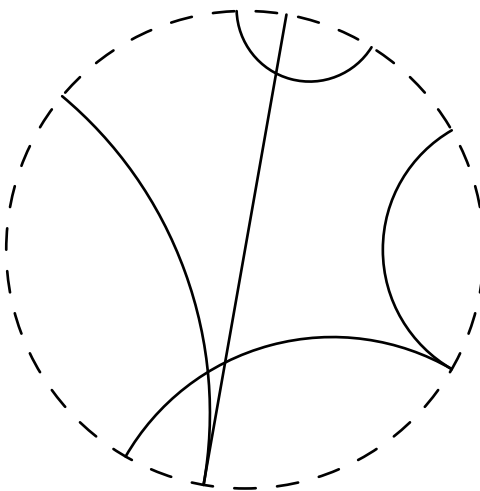


Модель Пуанкаре в круге

Задача 1. Пусть окружности $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ перпендикулярны (т.е. перпендикулярны касательные, проведённые к ним в одной из точек их пересечения). Докажите, что инверсия относительно окружности $\mathcal{S}_1$ переводит в себя круг, ограниченный окружностью $\mathcal{S}_2$.

Определение модели Пуанкаре в круге. Зафиксируем на евклидовой плоскости круг.

- Точкам плоскости Лобачевского соответствуют точки, лежащие строго внутри этого круга. Граница круга называется *абсолютом*, и её точки не считаются точками плоскости Лобачевского (они как бы «бесконечно удалённые»).
- Прямым плоскости Лобачевского соответствуют, во-первых, диаметры круга (*особые прямые*), во-вторых, заключённые внутри круга дуги окружностей, перпендикулярных абсолюту (*неособые*).
- Симметрии плоскости Лобачевского в этой модели — это симметрии относительно особых прямых и инверсии относительно окружностей, содержащих неособые прямые. (В силу задачи 1 эти инверсии не выводят за пределы модели.)
- Равными (*конгруэнтными*) считаются фигуры, которые можно совместить последовательным применением нескольких симметрий.



Задача 2. Покажите, что модель Пуанкаре в полуплоскости переводится (с сохранением геометрической структуры) в модель Пуанкаре в круге с помощью инверсии.

В частности, отсюда следует, что модель Пуанкаре в круге действительно является моделью плоскости Лобачевского.

Задача 3. Пусть точки A и B лежат на одной особой прямой в модели Пуанкаре в круге, и пусть известны их (евклидовы) расстояния до центра круга. Вычислите расстояние от A до B в смысле геометрии Лобачевского.

Задача 4. Покажите, что в модели Пуанкаре в круге для произвольной точки A существует симметрия (в смысле Лобачевского), переводящая эту точку в центр круга.

Задача 5. Докажите, что сумма углов любого треугольника на плоскости Лобачевского строго меньше 180° .

Задача 6. Пусть углы n -угольника M на плоскости Лобачевского равны $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Назовём *дефектом* этого многоугольника величину $\delta_M = 180^\circ(n - 2) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$.

- а) Докажите, что если M разбит на два многоугольника M_1 и M_2 , то $\delta_M = \delta_{M_1} + \delta_{M_2}$.
- б) Докажите, что $\delta_M > 0$ для любого M .

Задача 7. Докажите, что на плоскости Лобачевского имеет место признак равенства треугольников по трём углам.

* * *

Задача 8. Докажите, что любые два орицикла равны (в смысле Лобачевского).

Задача 9. а) Может ли у двух прямых на плоскости Лобачевского быть более одного общего перпендикуляра? б) В каком случае у двух прямых на плоскости Лобачевского есть (хотя бы один) общий перпендикуляр?