Теорема Шаля на плоскости Лобачевского

ЮМШ, 11 ноября 2016 г.

Движения евклидовой плоскости

Движение — преобразование плоскости (взаимно-однозначное отображение плоскости на себя), сохраняющее расстояния между точками.

Движения евклидовой плоскости

Движение — преобразование плоскости (взаимно-однозначное отображение плоскости на себя), сохраняющее расстояния между точками.

$\mathbf{T}_{\vec{v}}$ — параллельный перенос (сдвиг) на вектор $\vec{v}$
$\mathbf{R}_A^{\varphi}$ — поворот на угол φ вокруг точки A
$\mathbf{S}_a$ — (осевая) симметрия относительно прямой a
$\mathbf{Z}_A = \mathbf{R}_A^{180^\circ}$ — центральная симметрия относительно точки A
$\mathbf{I} = \mathbf{T}_{\vec{0}} = \mathbf{R}_A^{0^\circ} = \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_a$.

Движения евклидовой плоскости

Движение — преобразование плоскости (взаимно-однозначное отображение плоскости на себя), сохраняющее расстояния между точками.

$\mathbf{T}_{\vec{v}}$ — параллельный перенос (сдвиг) на вектор $\vec{v}$
$\mathbf{R}_A^{\varphi}$ — поворот на угол φ вокруг точки A
$\mathbf{S}_a$ — (осевая) симметрия относительно прямой a
$\mathbf{Z}_A = \mathbf{R}_A^{180^\circ}$ — центральная симметрия относительно точки A
$\mathbf{I} = \mathbf{T}_{\vec{0}} = \mathbf{R}_A^{0^\circ} = \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_a$.

Композиция движений: $(\mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1)(X) = \mathcal{F}_2(\mathcal{F}_1(X))$.

Движения евклидовой плоскости

Движение — преобразование плоскости (взаимно-однозначное отображение плоскости на себя), сохраняющее расстояния между точками.

$\mathbf{T}_{\vec{v}}$ — параллельный перенос (сдвиг) на вектор $\vec{v}$
$\mathbf{R}_A^{\varphi}$ — поворот на угол φ вокруг точки A
$\mathbf{S}_a$ — (осевая) симметрия относительно прямой a
$\mathbf{Z}_A = \mathbf{R}_A^{180^\circ}$ — центральная симметрия относительно точки A
$\mathbf{I} = \mathbf{T}_{\vec{0}} = \mathbf{R}_A^{0^\circ} = \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_a$.

Композиция движений: $(\mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1)(X) = \mathcal{F}_2(\mathcal{F}_1(X))$.

Теорема Шаля. Всякое движение евклидовой плоскости есть или $\mathbf{T}_{\vec{v}}$, или $\mathbf{R}_A^{\varphi}$, или $\mathbf{T}_{\vec{v}} \circ \mathbf{S}_a$, где $\vec{v} \parallel a$ *(скользящая симметрия)*.

Лемма о трёх гвоздях

A — неподвижная точка движения $\mathcal{F}$, если $\mathcal{F}(A) = A$.

Лемма о трёх гвоздях

A — неподвижная точка движения $\mathcal{F}$, если $\mathcal{F}(A) = A$.

Лемма. Если движение $\mathcal{F}$ имеет три неподвижные точки, не лежащие на одной прямой, то $\mathcal{F}$ — тождественное преобразование.

Лемма о трёх гвоздях

A — неподвижная точка движения $\mathcal{F}$, если $\mathcal{F}(A) = A$.

Лемма. Если движение $\mathcal{F}$ имеет три неподвижные точки, не лежащие на одной прямой, то $\mathcal{F}$ — тождественное преобразование.

Доказательство. Если $\mathcal{F}(D) = D' \neq D$, то все неподвижные точки $\mathcal{F}$ лежат на серединном перпендикуляре к отрезку DD'.

Теорема о трёх симметриях

Теорема. Всякое движение есть композиция 0, 1, 2 или 3 осевых симметрий.

Теорема о трёх симметриях

Теорема. Всякое движение есть композиция 0, 1, 2 или 3 осевых симметрий.

Доказательство. Создаём неподвижные точки!

Теорема о трёх симметриях

Теорема. Всякое движение есть композиция 0, 1, 2 или 3 осевых симметрий.

Доказательство. Создаём неподвижные точки!

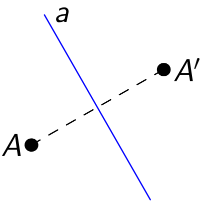
- Если $\mathcal{F}$ — тождественное, то всё доказано (0 симметрий).

Теорема о трёх симметриях

Теорема. Всякое движение есть композиция 0, 1, 2 или 3 осевых симметрий.

Доказательство. Создаём неподвижные точки!

- Если $\mathcal{F}$ — тождественное, то всё доказано (0 симметрий).
- $\mathcal{F}(A) = A' \neq A$.



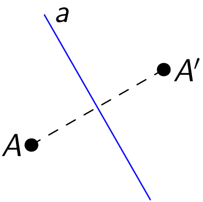
Пусть $\mathcal{G} = \mathbf{S}_a \circ \mathcal{F}$. Тогда A — неподвижная точка $\mathcal{G}$.

Теорема о трёх симметриях

Теорема. Всякое движение есть композиция 0, 1, 2 или 3 осевых симметрий.

Доказательство. Создаём неподвижные точки!

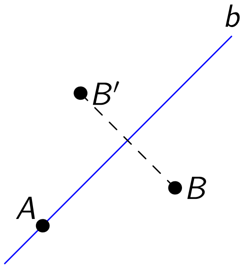
- Если $\mathcal{F}$ — тождественное, то всё доказано (0 симметрий).
- $\mathcal{F}(A) = A' \neq A$.



Пусть $\mathcal{G} = \mathbf{S}_a \circ \mathcal{F}$. Тогда A — неподвижная точка $\mathcal{G}$.
Если $\mathcal{G}$ — тождественное, то $\mathcal{F} = \mathbf{S}_a$ (1 симметрия).

Теорема о трёх симметриях (продолжение)

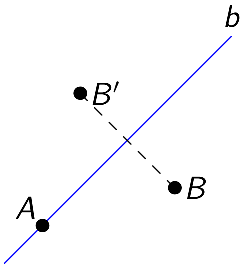
- $\mathcal{G}(A) = A$, $\mathcal{G}(B) = B' \neq B$.



Пусть $\mathcal{H} = \mathbf{S}_b \circ \mathcal{G} = \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_a \circ \mathcal{F}$. Тогда A и B — неподвижные точки $\mathcal{H}$.

Теорема о трёх симметриях (продолжение)

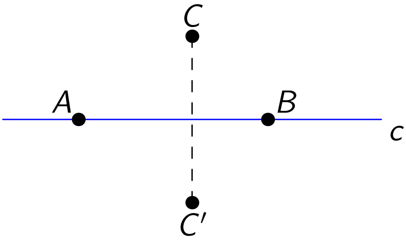
- $\mathcal{G}(A) = A$, $\mathcal{G}(B) = B' \neq B$.



Пусть $\mathcal{H} = \mathbf{S}_b \circ \mathcal{G} = \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_a \circ \mathcal{F}$. Тогда A и B — неподвижные точки $\mathcal{H}$.
Если $\mathcal{H}$ — тождественное, то $\mathcal{F} = \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ (2 симметрии).

Теорема о трёх симметриях (продолжение)

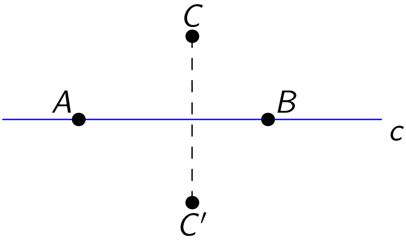
- $\mathcal{H}(A) = A$, $\mathcal{H}(B) = B$, $\mathcal{H}(C) = C' \neq C$



У движения $\mathbf{S}_c \circ \mathcal{H} = \mathbf{S}_c \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_a \circ \mathcal{F}$ три неподвижные точки.

Теорема о трёх симметриях (продолжение)

- $\mathcal{H}(A) = A$, $\mathcal{H}(B) = B$, $\mathcal{H}(C) = C' \neq C$



У движения $\mathbf{S}_c \circ \mathcal{H} = \mathbf{S}_c \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_a \circ \mathcal{F}$ три неподвижные точки.
Значит, это тождественное преобразование, и
$\mathcal{F} = \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_c$ (3 симметрии).

Теорема Шаля (евклидов случай)

Теорема о трёх симметриях. Всякое движение есть композиция 0, 1, 2 или 3 осевых симметрий.

- $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ — поворот, если a и b пересекаются.
- $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ — параллельный перенос, если a и b параллельны.
- $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_c$ — скользящая симметрия.

5-й постулат и геометрия Лобачевского

Аксиома о параллельных. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести *не более одной прямой,* не пересекающейся с данной.

5-й постулат и геометрия Лобачевского

Аксиома о параллельных. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести *не более одной прямой,* не пересекающейся с данной.

В геометрии Лобачевского вместо этой аксиомы принято её отрицание.

5-й постулат и геометрия Лобачевского

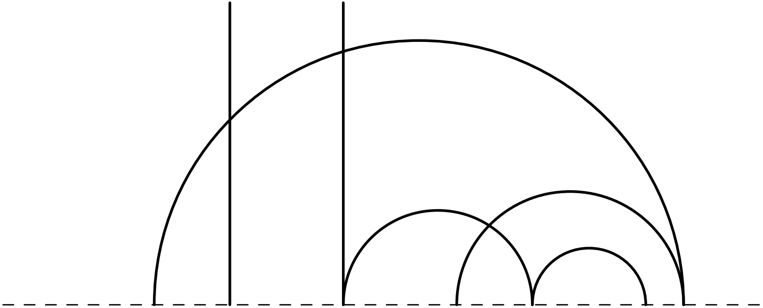
Аксиома о параллельных. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести *не более одной прямой,* не пересекающейся с данной.

В геометрии Лобачевского вместо этой аксиомы принято её отрицание.

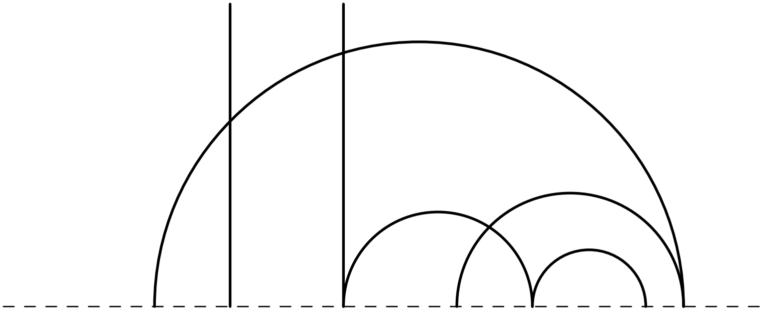
Доказательство теоремы о трёх симметриях не опирается на аксиому о параллельных.

Модель Пуанкаре

- Множество *точек* — верхняя полуплоскость $\{(x, y) \mid y > 0\}$. Граница $(y = 0)$ называется *абсолютом* и не входит в плоскость Лобачевского.
- *Прямые:*
  - *особые:* лучи, перпендикулярные абсолюту;
  - *неособые:* полуокружности с центром на абсолюте.



Модель Пуанкаре (продолжение)



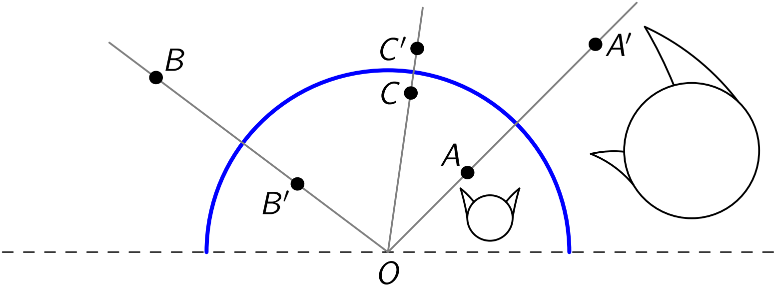
Две прямые на плоскости Лобачевского бывают:

- *пересекающимися:* имеют общую точку внутри плоскости;
- *параллельными:* либо имеют общую точку на абсолюте, либо обе являются особыми;
- *расходящимися.*

Через данную точку, не лежащую на данной прямой, можно провести ровно две прямые, параллельные данной (и бесконечно много расходящихся).

Модель Пуанкаре (продолжение)

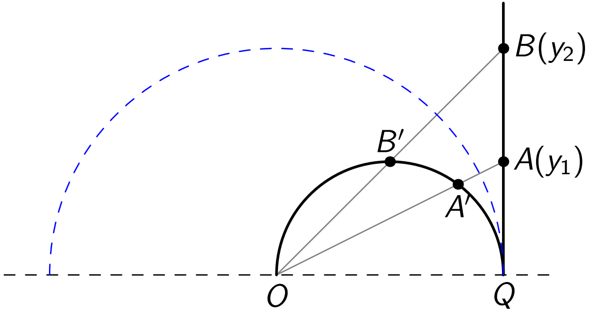
- *Углы* определяются как углы между касательными.
- *Симметрия* относительно неособой прямой — инверсия относительно соответствующей окружности.



$$OA' = \frac{R^2}{OA}$$

Модель Пуанкаре (продолжение)

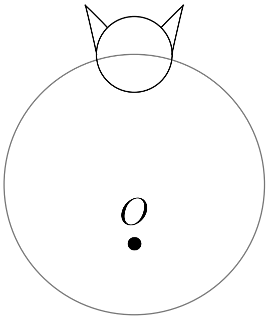
- Две фигуры *равны (конгруэнтны)*, если они совмещаются цепочкой симметрий.
- Отсюда получаются формулы для длины отрезка (на особой и неособой прямой):



$$\lambda(A,B) = c\left|\ln\frac{y_2}{y_1}\right|; \qquad \lambda(A',B') = \lambda(A,B) = c\left|\ln\frac{\operatorname{tg}\angle QOB'}{\operatorname{tg}\angle QOA'}\right|$$

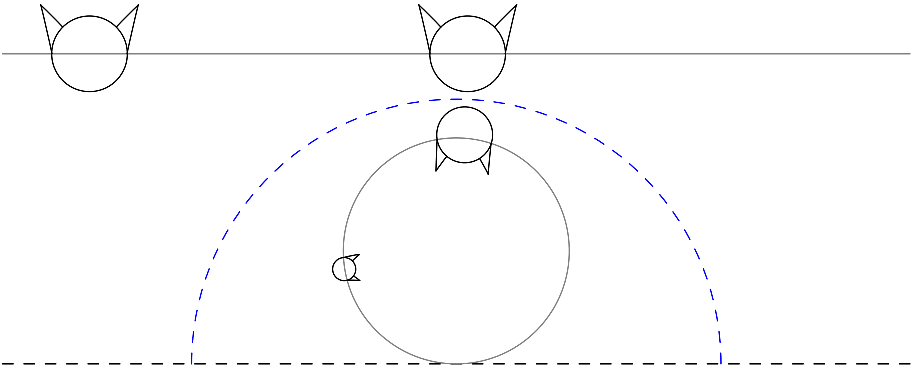
2 симметрии: поворот

Композиция симметрий относительно пересекающихся прямых есть поворот на удвоенный угол между этими прямыми.



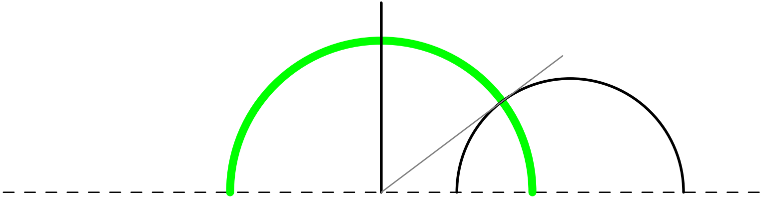
2 симметрии: движение по орициклам

a и b параллельны. Инверсией можно перевести их в две особые прямые. Тогда $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ — сдвиг вдоль абсолюта.



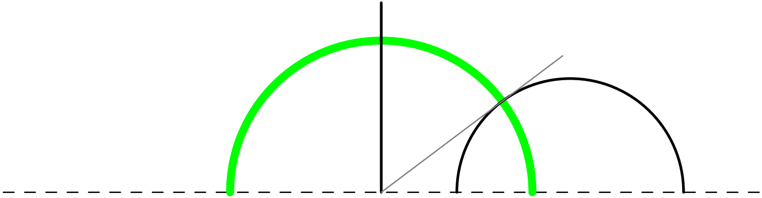
Общий перпендикуляр расходящихся прямых

Лемма. Две расходящиеся прямые имеют единственный общий перпендикуляр.



Общий перпендикуляр расходящихся прямых

Лемма. Две расходящиеся прямые имеют единственный общий перпендикуляр.

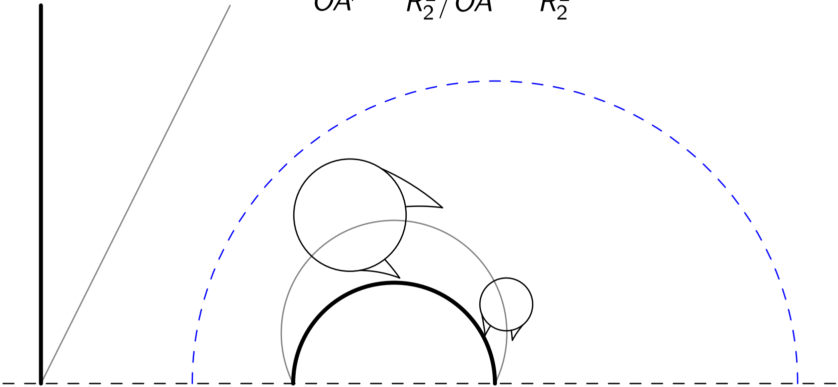


Единственность: на плоскости Лобачевского не существует прямоугольников.

2 симметрии: движение по эквидистантам

Если общий перпендикуляр a и b — особая прямая, то a и b изображаются концентрическими полуокружностями и $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ есть гомотетия с центром на абсолюте:

$$OA'' = \frac{R_1^2}{OA'} = \frac{R_1^2}{R_2^2/OA} = \frac{R_1^2}{R_2^2} OA.$$



3 симметрии

$$\mathcal{F} = \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_c .$$

3 симметрии

$\mathcal{F} = \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_c$.

- Можно заменить $\mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_c$ (см. классификацию композиций 2 симметрий) на $\mathbf{S}_{b'} \circ \mathbf{S}_{c'}$ так, что $b' \parallel a'$.

3 симметрии

$\mathcal{F} = \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_c$.

- Можно заменить $\mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_c$ (см. классификацию композиций 2 симметрий) на $\mathbf{S}_{b'} \circ \mathbf{S}_{c'}$ так, что $b' \parallel a'$.
  Считая, что a и b' особые, а c — полуокружность радиуса 1 (случай особой c тривиален), получаем, что $\mathcal{F} = \mathbf{T}_{\vec{a}} \circ \mathbf{I}_1$.

3 симметрии

$\mathcal{F} = \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_c$.

- Можно заменить $\mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_c$ (см. классификацию композиций 2 симметрий) на $\mathbf{S}_{b'} \circ \mathbf{S}_{c'}$ так, что $b' \parallel a'$.
  Считая, что a и b' особые, а c — полуокружность радиуса 1 (случай особой c тривиален), получаем, что $\mathcal{F} = \mathbf{T}_{\vec{a}} \circ \mathbf{I}_1$.
- Поменяем сдвиг на гомотетию.
  $\mathcal{F} = \mathbf{T}_{\vec{a}} \circ \mathbf{I}_1 \circ \mathbf{I}_R \circ \mathbf{I}_R = \mathbf{T}_{\vec{a}} \circ \mathbf{H}_{1/R^2} \circ \mathbf{I}_R$ $(R \neq 1)$.

3 симметрии

$\mathcal{F} = \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_c$.

- Можно заменить $\mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_c$ (см. классификацию композиций 2 симметрий) на $\mathbf{S}_{b'} \circ \mathbf{S}_{c'}$ так, что $b' \parallel a'$.
  Считая, что a и b' особые, а c — полуокружность радиуса 1 (случай особой c тривиален), получаем, что $\mathcal{F} = \mathbf{T}_{\vec{a}} \circ \mathbf{I}_1$.
- Поменяем сдвиг на гомотетию.
  $\mathcal{F} = \mathbf{T}_{\vec{a}} \circ \mathbf{I}_1 \circ \mathbf{I}_R \circ \mathbf{I}_R = \mathbf{T}_{\vec{a}} \circ \mathbf{H}_{1/R^2} \circ \mathbf{I}_R$ $(R \neq 1)$.
  $\mathbf{T}_{\vec{a}} \circ \mathbf{H}_{1/R^2}$ — тоже гомотетия, но с другим центром:

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{1}{R^2} z \mapsto \frac{1}{R^2} z + a$$

Неподвижная точка (центр гомотетии):

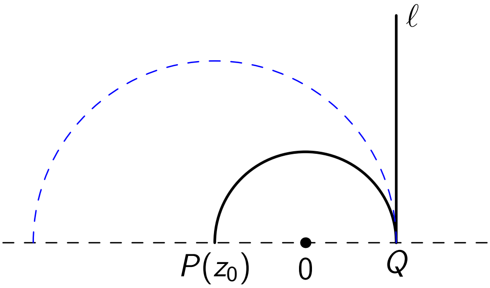
$$\frac{1}{R^2} z_0 + a = z_0; \qquad z_0 = \frac{a}{1 - \frac{1}{R^2}}.$$

3 симметрии (продолжение)

$\mathcal{F} = \mathbf{H}^{z_0}_{1/R^2} \circ \mathbf{I}_R$.

Выберем R так, чтобы центр гомотетии лежал на окружности инверсии ($z_0 = R$): $R_0 = \frac{a}{1-\frac{1}{R_0^2}}$; $\quad R_0^2 - aR_0 - 1 = 0$.

$D = a^2 + 4 > 0 \Rightarrow$ такой действительный радиус R_0 существует.

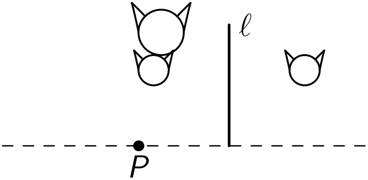


Преобразуем прямую симметрии в особую.

$$\mathcal{F} = \mathbf{H}^P_k \circ \mathbf{S}_\ell$$

3 симметрии (продолжение)

$$\mathcal{F} = \mathbf{H}_k^P \circ \mathbf{S}_\ell$$

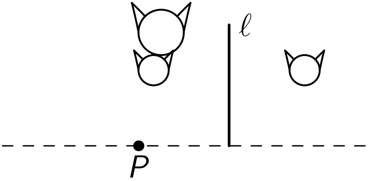


$$z \mapsto 2a - z \mapsto k(2a - z)$$

Осталось совместить ℓ и P.

3 симметрии (продолжение)

$$\mathcal{F} = \mathbf{H}_k^P \circ \mathbf{S}_\ell$$



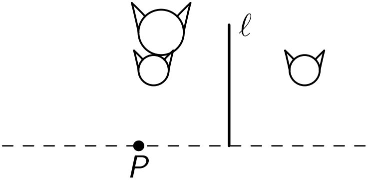
$$z \mapsto 2a - z \mapsto k(2a - z)$$

Осталось совместить ℓ и P.

Неподвижная точка на абсолюте: $k(2a - x_0) = x_0$; $x_0 = \dfrac{2ka}{k+1}$.

3 симметрии (продолжение)

$$\mathcal{F} = \mathbf{H}_k^P \circ \mathbf{S}_\ell$$



$$z \mapsto 2a - z \mapsto k(2a - z)$$

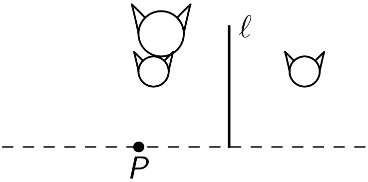
Осталось совместить ℓ и P.

Неподвижная точка на абсолюте: $k(2a - x_0) = x_0$; $x_0 = \dfrac{2ka}{k+1}$.

$P' = x_0$, ℓ' — особая прямая из точки P'.

3 симметрии (продолжение)

$$\mathcal{F} = \mathbf{H}_k^P \circ \mathbf{S}_\ell$$



$$z \mapsto 2a - z \mapsto k(2a - z)$$

Осталось совместить ℓ и P.

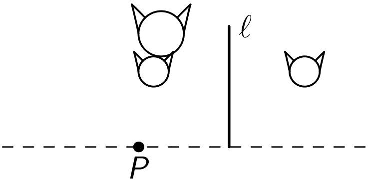
Неподвижная точка на абсолюте: $k(2a - x_0) = x_0$; $x_0 = \dfrac{2ka}{k+1}$.

$P' = x_0$, ℓ' — особая прямая из точки P'.

$$\mathcal{F} = \mathbf{H}_k^{P'} \circ \mathbf{S}_\ell \qquad z \mapsto 2x_0 - z \mapsto k(2x_0 - z - x_0) + x_0 = 2ka - kz$$

3 симметрии (продолжение)

$$\mathcal{F} = \mathbf{H}_k^P \circ \mathbf{S}_\ell$$



$$z \mapsto 2a - z \mapsto k(2a - z)$$

Осталось совместить ℓ и P.
Неподвижная точка на абсолюте: $k(2a - x_0) = x_0$; $x_0 = \dfrac{2ka}{k+1}$.
$P' = x_0$, ℓ' — особая прямая из точки P'.

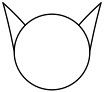
$$\mathcal{F} = \mathbf{H}_k^{P'} \circ \mathbf{S}_\ell \qquad z \mapsto 2x_0 - z \mapsto k(2x_0 - z - x_0) + x_0 = 2ka - kz$$

Композиция симметрии относительно прямой и движения вдоль эквидистант этой же прямой (аналог скользящей симметрии).

Теорема Шаля для плоскости Лобачевского

Всякое движение плоскости Лобачевского — одно из следующих:

- поворот;
- движение вдоль орициклов;
- движение вдоль эквидистант (аналог параллельного переноса);
- композиция симметрии относительно прямой и сдвига вдоль эквидистант этой же прямой (аналог скользящей симметрии).



Спасибо!