Ещё одна встреча со Сферой

(исправленная версия 25.10.2015)

Обозначения движений сферы и плоскости

$\mathbf{R}_A^{\varphi}$ — поворот на угол φ вокруг точки A.
$\mathbf{S}_{\ell}$ — осевая симметрия относительно прямой ℓ.
Только на плоскости: $\mathbf{T}_{\vec{v}}$ — параллельный перенос на вектор $\vec{v}$.
Только на сфере: $\mathbf{Z}$ — симметрия относительно центра сферы (переводит точку X в противоположную точку $\widetilde{X}$).

Теоремы Шаля

Всякое движение плоскости есть или $\mathbf{R}_A^{\varphi}$, или $\mathbf{T}_{\vec{v}}$, или $\mathbf{T}_{\vec{v}} \circ \mathbf{S}_{\ell} = \mathbf{S}_{\ell} \circ \mathbf{T}_{\vec{v}}$, где $\vec{v} \parallel \ell$ (при $\vec{v} = \vec{0}$ получается $\mathbf{S}_{\ell}$).
Всякое движение сферы есть или $\mathbf{R}_A^{\varphi}$, или $\mathbf{R}_A^{\varphi} \circ \mathbf{Z} = \mathbf{Z} \circ \mathbf{R}_A^{\varphi}$.

Пусть a — ***поляра*** точки A, т.е. серединный перпендикуляр к отрезку $A\widetilde{A}$. Тогда $\mathbf{S}_a = \mathbf{R}_A^{180^\circ} \circ \mathbf{Z}$ (так $\mathbf{S}_a$ представляется в виде, предлагаемом формулировкой теоремы) и, наоборот, $\mathbf{Z} = \mathbf{R}_A^{180^\circ} \circ \mathbf{S}_a$. Следовательно, $\mathbf{R}_A^{\varphi} \circ \mathbf{Z} = \mathbf{R}_A^{\varphi+180^\circ} \circ \mathbf{S}_a$. Движение $\widetilde{\mathbf{R}}_A^{\psi} = \mathbf{R}_A^{\psi} \circ \mathbf{S}_a$ является сферическим аналогом скользящей симметрии плоскости $\mathbf{T}_{\vec{v}} \circ \mathbf{S}_{\ell}$. Условие параллельности $\vec{v}$ и ℓ заменяется условием полярности A и a.

С учётом этих соображений теоремы Шаля могут быть сформулированы словесно следующим образом:

— Всякое движение плоскости есть или поворот, или параллельный перенос, или скользящая симметрия.

— Всякое движение сферы есть либо поворот, либо сферический аналог скользящей симметрии.

Тождественное движение $\mathbf{E}$ есть $\mathbf{R}_A^{0^\circ}$ для произвольной точки A (на плоскости также $\mathbf{T}_{\vec{0}}$).

Задачи

1. Найдите все движения $\mathcal{X}$, удовлетворяющие уравнению:
а) $\mathcal{X} \circ \mathcal{X} = \mathcal{X}$; **б)** $\mathcal{X} \circ \mathcal{X} = \mathbf{E}$; **в)** $\mathcal{X} \circ \mathcal{X} = \mathbf{R}_A^{\varphi}$; **г)** $\mathcal{X} \circ \mathcal{X} = \mathbf{S}_{\ell}$; **д)** $\mathcal{X} \circ \mathcal{X} = \mathbf{T}_{\vec{a}}$; **е)** $\mathcal{X} \circ \mathcal{X} \circ \mathcal{X} = \mathbf{Z}$; **ж)** $\mathcal{X}^{-1} \circ \mathbf{R}_A^{\varphi} \circ \mathcal{X} = \mathbf{R}_B^{\varphi}$; **з)** $\mathcal{X}^{-1} \circ \mathbf{S}_m \circ \mathcal{X} = \mathbf{S}_n$.
Решите каждое уравнение отдельно на сфере (кроме пункта **«д»**) и на плоскости (кроме пункта **«е»**).

В задачах **2**, **3** и **4** мы будем считать, что радиус сферы равен 1. Тогда длины отрезков равны радианным мерам соответствующих центральных углов. Это значит, что можно рассматривать отрезки как углы и применять к ним тригонометрические функции.

2. *Полярный треугольник.* На сфере дан треугольник со сторонами a, b, c и противолежащими им углами α, β, γ соотвественно. Постройте треугольник со сторонами $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$ и противолежащими им углами $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$ соответственно. В каком случае этой цели удовлетворяет исходный треугольник?

3. *Соотношения в прямоугольном треугольнике на сфере.* Пусть на сфере дан треугольник со сторонами a, b, c, меньшими $\frac{\pi}{2}$, против стороны c лежит прямой угол, а против стороны a — острый угол α. Докажите, что **а)** $\cos\alpha = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}$; **б)** $\sin\alpha = \dfrac{\sin a}{\sin c}$.
в) Выведите из предыдущих пунктов сферический аналог теоремы Пифагора: $\cos c = \cos a \cdot \cos b$.

4. Какие значения могут принимать **а)** углы равностороннего; **б)** стороны равноугольного треугольника на сфере?

5. В сферическом треугольнике две стороны имеют фиксированную длину — a и b соответственно. Какой должна быть третья сторона, чтобы величина наибольшего угла треугольника принимала наименьшее возможное значение?

6. На сфере проведено несколько «прямых» (больших окружностей). Они образуют 22 точки пересечения, причём в 12 из них пересекаются по две «прямые», а в остальных 10 — по три. Сколько всего «прямых» проведено?