

Число сочетаний из n по k — это число способов выбрать из n различных предметов k различных предметов, если порядок, в котором они выбираются, неважен. Обозначение: C_n^k (читается: «цэ из эн по ка»).

Теорема. Число сочетаний можно найти по формуле $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$; при этом считается, что $0! = 1$.)

9.1. а) Есть 10 учебников по разным предметам. Сколько существует способов выбрать один из них? А сколько после этого способов выбрать второй? А третий? Сколько есть способов выбрать три учебника («первый», «второй», «третий»)¹?

б) Пусть в пункте а) мы выбрали 3 учебника из 10 в каком-то порядке, например: «русский + математика + физика». Сколько ещё есть способов выбрать те же три учебника, но в другой последовательности?

в) Иван и Леван посчитали число способов выбрать 3 учебника из 10. При этом Иван считал способы, отличающиеся только порядком учебников, разными, а Леван — одинаковыми. Кто насчитал больше способов — Иван или Леван? Во сколько раз отличаются полученные ответы и почему?

г) Чему равно C_{10}^3 ? Кто в пункте в) насчитал C_{10}^3 способов — Иван или Леван?

д) Попробуйте записать выражение для вычисления C_{10}^3 в таком же виде, как в теореме — с помощью трёх факториалов.

9.2. Замените в условиях предыдущей задачи число 10 на число n , а число 3 — на число k . Ответьте на те же самые вопросы и докажите **теорему!**

9.3. Учитель физкультуры велел 10 школьникам выстроиться в шеренгу и сказал, что первые трое в шеренге будут подтягиваться, а остальные — отжиматься.

а) Сколькими способами могут школьники выстроиться в шеренгу?

б) Дима, Боря и Игорь хорошо подтягиваются и решили встать в начало шеренги (друг за другом в каком-то порядке). Сколько у них есть способов это сделать?

в) Остальные семеро ребят не хотят подтягиваться и решили встать в конец шеренги (друг за другом в каком-то порядке). Сколько у них есть способов это сделать?

г) Сколько у 10 ребят есть способов выстроиться в шеренгу так, чтобы подтягивались всё равно только Дима, Боря и Игорь?

д) Что больше и во сколько раз: число способов построить 10 ребят в шеренгу или число способов выбрать из них троих, которые будут подтягиваться?

е) Снова замените 10 на n и 3 на k и придумайте ещё одно доказательство **теоремы**.

ж) Верно ли, что $C_{10}^3 = C_{10}^7$? А что $C_n^k = C_n^{n-k}$? Дайте ответ без помощи **теоремы**.

9.4. Сколько способов выбрать: **а)** двух депутатов из пяти кандидатов; **б)** трёх депутатов из пяти кандидатов; **в)** трёх депутатов из восьми кандидатов; **г)** одного директора, двух заместителей, трёх менеджеров по персоналу и четырёх менеджеров по клинингу из 10 претендентов? Порядок выбора во всех случаях неважен.

¹Имеется в виду, что выбор «русский + математика + физика» и выбор «физика + русский + математика» — не одно и то же: они отличаются порядком учебников, хотя набор учебников один и тот же.

9.5. Сколько различных чисел можно получить, переставляя цифры в числе: **а)** 11222; **б)** 11122; **в)** 55577777; **г)** 1223334444? Как эта задача связана с задачей 9.4?

9.6. У мамы два одинаковых яблока, три одинаковые груши и четыре одинаковых апельсина. В течение девяти дней она ежедневно даёт сыну один из оставшихся фруктов. Сколькими способами это можно сделать?

9.7. Рота состоит из трёх офицеров, шести сержантов и 60 рядовых. (Военные одного звания тоже различаются между собой! У каждого своя жизнь, своя судьба, свои увлечения и всё такое.)

а) Сколькими способами можно выделить из них отряд в составе офицера, двух сержантов и 20 рядовых?

б) Прошёл слух, что генерал решил разжаловать каких-то трёх сержантов до рядовых, а каких-то трёх рядовых повысить до сержантов. Сколько у него способов это сделать?

Ответы запишите с помощью чисел сочетаний и не вычисляйте.

9.8. У Алины 6 подруг, и каждое воскресенье она идёт в кино с какими-нибудь тремя из них.

а) Сколько разных компаний может собрать Алина для похода в кино?

б) Какое наибольшее число фильмов может Алина посмотреть с подругами в кино так, чтобы компания подруг ни разу не повторилась (на каждых двух фильмах хотя бы одна подруга в компании отличалась)?

в) Сколько у Алины способов выбрать компанию на каждое из воскресений декабря так, чтобы компании ни разу не повторились?

9.9. Сколько существует чисел, в которых каждая следующая цифра меньше предыдущей: **а)** двузначных; **б)** трёхзначных; **в)** семизначных; **г)** десятизначных; **д)** 11-значных?

9.10. а) Сколько всего диагоналей у 10-угольника? (Напомним, что диагональ многоугольника — это отрезок, который соединяет две его вершины, не соединённые стороной.)

б) Сколько существует 4-угольников, вершины которого расположены в вершинах данного 10-угольника?

в) Дан 10-угольник, все диагонали которого лежат внутри него и никакие три диагонали которого не пересекаются в одной точке (не считая вершин). Сколько внутри него точек пересечения диагоналей?