МММФ-7. Занятие 14. Формулы и преобразования (03.03.2018)

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b) \qquad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2 \qquad (a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

14.1. Замените звёздочки такими одночленами, чтобы образовалось тождество:
а) $(6a^5+*)^2=*+*+49b^4$
б) $(*-*)^2=9x^6-*+100x^4y^{10}$
в) $(5b^2-*)^2=*-30a^2b^3+*$
г) $(*-4)^3=y^3-*+*-64$
д) $(4a^2+*)^3=*+*+300a^2m^2+*$
е) $(3k)^2-(5n)^2=(*-5n)(3k+*)$

14.2. Найдите значение произведения

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{400}\right)$$

14.3. Существуют ли такие целые числа x, y и z, для которых выполняется равенство $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=2018$?

14.4. Числа a, b, c различны, а прямые

$$y=a^2x+bc$$
$$y=b^2x+ac$$
$$y=c^2x+ab$$

проходят через одну точку. Докажите, что $a+b+c=0$.

14.5. Числа a, b и c таковы, что выражения $\frac{a+b}{c}$, $\frac{b+c}{a}$ и $\frac{c+a}{b}$ принимают одинаковое значение. Какое?

14.6. Существуют ли такие три различных числа a, b и c, что

$$a(b-c)=b(c-a)=c(a-b)?$$

14.7. Известно, что каждое из чисел x и y можно представить в виде суммы квадратов каких-то двух целых чисел. Докажите, что число xy также является суммой квадратов каких-то двух целых чисел.

14.8. Незнайка придумал фантастическое умножение $\circledast$, которое для любых x и y удовлетворяет аксиомам нуликативности $x\circledast x=0$ и тилимилитивности: $x\circledast(y\circledast z)=(x\circledast y)+z$. Помогите Знайке вычислить $1755\circledast 2018$.

МММФ-7. Занятие 14. Формулы и преобразования (03.03.2018)

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b) \qquad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2 \qquad (a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

14.1. Замените звёздочки такими одночленами, чтобы образовалось тождество:
а) $(6a^5+*)^2=*+*+49b^4$
б) $(*-*)^2=9x^6-*+100x^4y^{10}$
в) $(5b^2-*)^2=*-30a^2b^3+*$
г) $(*-4)^3=y^3-*+*-64$
д) $(4a^2+*)^3=*+*+300a^2m^2+*$
е) $(3k)^2-(5n)^2=(*-5n)(3k+*)$

14.2. Найдите значение произведения

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{400}\right)$$

14.3. Существуют ли такие целые числа x, y и z, для которых выполняется равенство $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=2018$?

14.4. Числа a, b, c различны, а прямые

$$y=a^2x+bc$$
$$y=b^2x+ac$$
$$y=c^2x+ab$$

проходят через одну точку. Докажите, что $a+b+c=0$.

14.5. Числа a, b и c таковы, что выражения $\frac{a+b}{c}$, $\frac{b+c}{a}$ и $\frac{c+a}{b}$ принимают одинаковое значение. Какое?

14.6. Существуют ли такие три различных числа a, b и c, что

$$a(b-c)=b(c-a)=c(a-b)?$$

14.7. Известно, что каждое из чисел x и y можно представить в виде суммы квадратов каких-то двух целых чисел. Докажите, что число xy также является суммой квадратов каких-то двух целых чисел.

14.8. Незнайка придумал фантастическое умножение $\circledast$, которое для любых x и y удовлетворяет аксиомам нуликативности $x\circledast x=0$ и тилимилитивности: $x\circledast(y\circledast z)=(x\circledast y)+z$. Помогите Знайке вычислить $1755\circledast 2018$.

Сайт Малого мехмата: mmmf.msu.ru