Малый мехмат МГУ, 6 класс, группа «А» **17 ноября 2018 года**

Признаки делимости

Натуральное число **делится на 2** тогда и только тогда, когда его последняя цифра чётна.
Натуральное число **делится на 5** тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 5 (то есть равна 0 или 5).
Натуральное число **делится на 4** тогда и только тогда, когда на 4 делится число, образованное его последними двумя цифрами.
Натуральное число **делится на 3** тогда и только тогда, когда на 3 делится сумма его цифр.
Натуральное число **делится на 9** тогда и только тогда, когда на 9 делится сумма его цифр.

Задача 0. Незнайка придумал новые признаки делимости, по аналогии с известными:
а) *признак делимости на 25:* натуральное число делится на 25 тогда и только тогда, когда его две последние цифры — 00, 25, 50 или 75;
б) *признак делимости на 16:* натуральное число делится на 16 тогда и только тогда, когда на 16 делится число, образованное его последними четырьмя цифрами;
в) *признак делимости на 81:* натуральное число делится на 81 тогда и только тогда, когда его сумма цифр делится на 81.
Справедливы ли признаки делимости, придуманные Незнайкой?

Задача 1. Ковбой Билл зашёл в бар и попросил у бармена бутылку виски за 3 доллара и шесть коробков непромокаемых спичек, цену которых он не знал. Бармен потребовал с него 11 долларов 80 центов (1 доллар = 100 центов), и в ответ на это Билл вытащил револьвер. Тогда бармен пересчитал стоимость покупки и исправил ошибку. Как Билл догадался, что бармен пытался его обсчитать?

Задача 2. Незнайка перемножил все числа от 1 до 100. Посчитал сумму цифр произведения. У полученного числа он снова посчитал сумму цифр, и так далее. В конце концов Незнайка получил однозначное число. Какое?

Задача 3. Поставьте цифры вместо звёздочек в числе $15{*}23{*}$ так, чтобы полученное число делилось на 72. Найдите все возможные решения!

Задача 4. 109 яблок разложены по пакетам. В некоторых пакетах лежит по x яблок, в других – по три яблока. Найдите все возможные значения x, если всего пакетов – 20.

Задача 5. В справочнике «Магия для чайников» написано: «Замените в слове ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные — на разные. Если полученное число окажется простым, случится настоящее землетрясение». Возможно ли таким образом устроить землетрясение?

Задача 6. Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из этих чисел делится на 5.

Задача 7. Может ли произведение n первых простых чисел являться квадратом натурального числа?

Малый мехмат МГУ, 6 класс, группа «А» *Доп. задачи* **17 ноября 2018 года**

Задача 8. Существует ли число, кратное 2007, сумма цифр которого равна 2007?

Задача 9. Пятизначное число называется неразложимым, если оно не раскладывается в произведение двух трёхзначных чисел. Какое наибольшее количество неразложимых пятизначных чисел может идти подряд?

Задача 10. Саша пишет на доске последовательность натуральных чисел. Первое число $N > 1$ написано заранее. Новые натуральные числа он получает так: вычитает из последнего записанного числа или прибавляет к нему любой его делитель, больший 1. При любом ли натуральном $N > 1$ Саша сможет написать на доске в какой-то момент число 2011?

Малый мехмат МГУ, 6 класс, группа «Б» **17 ноября 2018 года**

Признаки делимости

Натуральное число **делится на 2** тогда и только тогда, когда его последняя цифра чётна.
Натуральное число **делится на 5** тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 5 (то есть равна 0 или 5).
Натуральное число **делится на 4** тогда и только тогда, когда на 4 делится число, образованное его последними двумя цифрами.
Натуральное число **делится на 3** тогда и только тогда, когда на 3 делится сумма его цифр.
Натуральное число **делится на 9** тогда и только тогда, когда на 9 делится сумма его цифр.

Задача 0. Незнайка придумал новые признаки делимости, по аналогии с известными:
а) *признак делимости на 25:* натуральное число делится на 25 тогда и только тогда, когда его две последние цифры — 00, 25, 50 или 75;
б) *признак делимости на 16:* натуральное число делится на 16 тогда и только тогда, когда на 16 делится число, образованное его последними четырьмя цифрами;
в) *признак делимости на 81:* натуральное число делится на 81 тогда и только тогда, когда его сумма цифр делится на 81.
Справедливы ли признаки делимости, придуманные Незнайкой?

Задача 1. В числе одна или несколько цифр заменены звёздочками. Найдите все возможные значения звёздочек, для которых:
а) $12{*}47$ делится на 3; **в)** $12{*}1{*}$ делится на 9;
б) $7256{*}$ делится на 4; **г)** $12{*}3{*}$ делится на 45.

Задача 2. Используя только цифры 0, 1, 2, 3, причём каждую хотя бы по одному разу, напишите семизначное число, удовлетворяющее условию:
а) число должно делиться на 9;
б) число должно делиться на 5 и 3;
в) число должно делиться на 33.

Задача 3. Ловкий Аладдин занимался подсчетом принесенных из пещеры чудес богатств и вычислил значение выражения $14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19$, но пробегавшая мимо обезьянка Абу поставила кляксу в ответе: 1953*040. Придется ли снова Аладдину выполнять умножения, или можно как-то проще определить пострадавшую цифру?

Задача 4. Незнайка перемножил все числа от 1 до 100. Посчитал сумму цифр произведения. У полученного числа он снова посчитал сумму цифр, и так далее. В конце концов Незнайка получил однозначное число. Какое?

Задача 5. В справочнике «Магия для чайников» написано: «Замените в слове ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные — на разные. Если полученное число окажется простым, случится настоящее землетрясение». Возможно ли таким образом устроить землетрясение?

Задача 6. Известно, что $35! = 10333147966386144929{*}66651337523200000000$. Найдите цифру, заменённую звездочкой. ($35!$ — произведение всех чисел от 1 до 35: $35! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 35$.)

Малый мехмат МГУ, 6 класс, группа «Б» *Доп. задачи* **17 ноября 2018 года**

Задача 7. Докажите, что любое натуральное число, десятичная запись которого состоит из 3n одинаковых цифр, делится на 37.

Задача 8. Сумасшедший кассир меняет любые две монеты на любые три по вашему выбору, а любые три – на любые две. Сможет ли Петя обменять у него 100 монет достоинством 1 рубль на 100 монет достоинством 1 форинт, отдав ему при обмене ровно 2001 монету?

Задача 9. Может ли произведение первых n простых чисел являться квадратом натурального числа?