

Разнойбой

1. Про целые числа a, b, c известно, что $a + b + c \div 6$. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3 \div 6$.
2. Кай и Снежная Королева играют в такую игру: они по очереди переводят остановившиеся часы на два или на три часа вперёд. Тот, кто поставит часовую стрелку на 12, выигрывает. Сейчас ходит Кай, а на часах шесть ровно. Сможет ли кто-нибудь из игроков обеспечить себе победу, и как для этого нужно играть?
3. В клетках доски 10×10 записаны числа от 0 до 99 так, как показано на рисунке. На доску поставили 10 не бьющих друг друга ладей. Чему может быть равна сумма чисел в клетках, занятых ладьями? (Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

4. Сейчас вылетит птичка. В фотоателье залетели 20 птиц — 8 скворцов, 7 трясогузок и 5 дятлов. Каждый раз, как только фотограф щёлкнет затвором фотоаппарата, какая-то одна из птичек улетит (насовсем). Сколько кадров сможет сделать фотограф, чтобы быть уверенным: у него останется не меньше пяти птиц одного вида, и не меньше трёх — другого?
5. Докажите, что $(n^2)!$ делится на $n!^n$ при любом натуральном n .
6. Верно ли, что вершины любого графа можно так раскрасить в два цвета, что доля рёбер с разными концами среди всех рёбер составит не менее а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{3}$?