

Суммирование

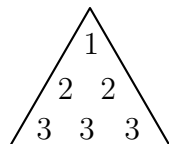
1. Попробуйте геометрически вывести формулы для сумм:

а) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$; б) $1 + 2 + 3 + \dots + n$.

(Засчитывается решение любым способом.)

2. Расположите в правильном треугольнике со стороной n одну единицу, две двойки, три тройки и т. д. Случай $n = 3$ см. на рисунке. Рассмотрите ещё два треугольника, полученных из данного поворотом на 120° в обоих направлениях. Глядя на полученные три треугольника, выведите формулу для *суммы квадратов*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

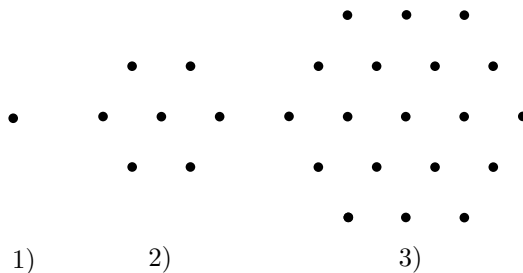


3. Незнайка обнаружил интересную арифметическую закономерность:

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1^2, \\ 1^3 + 2^3 &= (1 + 2)^2, \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 &= (1 + 2 + 3)^2, \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= (1 + 2 + 3 + 4)^2. \end{aligned}$$

Но уже пятое равенство Незнайка поленился проверять. Проверьте вычисления Незнайки, сформулируйте гипотезу для любого натурального n и выясните, верна ли она.

4. На рисунке вы видите первые три гекса. Сколько точек на первых ста гексах?



5. Рассмотрим прямоугольники $1 \times \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$, $\dots$, $\frac{1}{99} \times \frac{1}{100}$. Вычислите их суммарную площадь.

6. У неравенства $x_1 \leq 2$ ровно три неотрицательных решения: 0, 1, 2. У неравенства $x_1 + x_2 \leq 1$ тоже ровно три решения в целых неотрицательных числах: (0, 0), (1, 0) и (0, 1). Докажите, что неравенства

$$x_1 + \dots + x_k \leq n \quad \text{и} \quad x_1 + \dots + x_n \leq k$$

имеют одинаковое количество решений в целых неотрицательных числах при любых натуральных n и k .