Центр масс

1. Старый пират зарыл клад на острове среди 20 деревьев. После этого он написал завещание, в котором указал, как искать клад: надо встать к первому дереву, пройти половину расстояния до второго дерева, затем повернуть к третьему и пройти треть расстояния до него, и т. д., наконец, повернуть к двадцатому и пройти двадцатую часть расстояния до него. К сожалению, пират забыл указать, как занумерованы деревья! Сколько разных ям придётся выкопать потомкам пирата, чтобы всё-таки найти клад?
Если сразу не получается, решите более простые варианты задачи:
а) для двух деревьев; **б)** для трёх деревьев; **в)** для n деревьев на прямой.

Центр масс: координатное определение.
Пусть $m_1, \dots, m_n$ — положительные числа («массы»), $A_1, \dots, A_n$ — точки (на прямой, на плоскости или в пространстве), заданные координатами. **Центр масс** системы $\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ m_1 & \dots & m_n \end{pmatrix}$ — это точка

$$\mathbf{C}\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ m_1 & \dots & m_n \end{pmatrix} = \frac{m_1A_1 + \ldots + m_nA_n}{m_1 + \ldots + m_n}$$

(умножение точки A_i на число m_i и сложение точек m_iA_i и m_jA_j происходит покоординатно).
1. Физический смысл центра масс. Пусть к точкам $A_1, \dots, A_n$, лежащим на невесомой пластине, привязаны гирьки с массами $m_1, \dots, m_n$. Тогда центр масс этой системы — та точка, в которую надо поставить остриё карандаша, чтобы пластина находилась в равновесии.
2. Можно допустить и отрицательные массы, но важно, чтобы $m_1 + \ldots + m_n \neq 0$.
3. На геометрическом языке операции сложения и умножения на число проводятся с векторами, а не с точками. При выборе системы координат точку A можно отождествить с вектором $\overrightarrow{OA}$.
4. Центр масс — *аффинное* понятие: оно не зависит от выбора системы координат. Например, центр масс двух точек A и B с единичными массами — это всегда середина отрезка AB.
Центр масс: векторное определение.
Пусть $m_1, \dots, m_n > 0$, $A_1, \dots, A_n$ — точки. **Центр масс** системы $\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ m_1 & \dots & m_n \end{pmatrix}$ — это такая точка M, что $m_1\overrightarrow{MA_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{MA_n} = \overrightarrow{0}$.

Теорема. Для любой системы точек центр масс существует и единственный.
(Формулировка осмысленна для векторного определения. Доказательство можно провести через координаты.)

Теорема (правило рычага). Центр масс системы $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$ лежит на отрезке A_1A_2 и делит его в отношении $m_2 : m_1$, считая от вершины A_1 (отношение масс обратно пропорционально отношению плеч).

Теорема (о группировке масс). Пусть

$$M = \mathbf{C}\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n & B_1 & \dots & B_k \\ m_1 & \dots & m_n & p_1 & \dots & p_k \end{pmatrix},\ B = \mathbf{C}\begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_k \\ p_1 & \dots & p_k \end{pmatrix}.$$

Тогда $M = \mathbf{C}\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n & B \\ m_1 & \dots & m_n & p_1 + \dots + p_k \end{pmatrix}$. Иначе говоря, если в некоторой системе заменить часть точек на их центр масс и поместить туда массу, равную сумме масс исходных точек, то центр масс всей системы не изменится.
Докажите с помощью центра масс следующие теоремы.

2. Теорема Чевы. Пусть на сторонах AB, BC и AC взяты точки P, Q и R. Отрезки CP, AQ и BR пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1.$$

3. Теорема Ван Обеля. Пусть на сторонах AB, BC и AC взяты точки P, Q и R так, что отрезки CP, AQ и BR пересекаются в точке K. Тогда

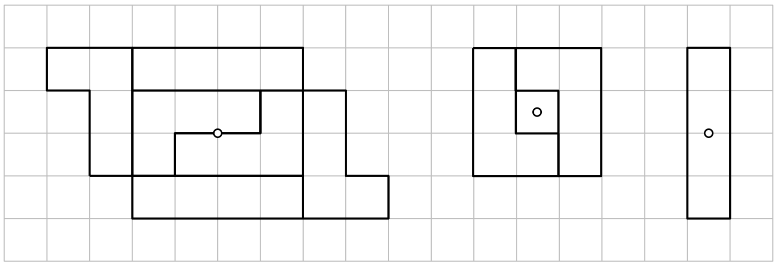
$$\frac{AK}{KQ} = \frac{AP}{PB} + \frac{AR}{RC}.$$

4. Теорема Менелая. Пусть на сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки P и Q, а на продолжении стороны AC за точку C — точка R. Тогда точки P, Q и R лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1.$$

5. На сторонах BC и CD паралеллограмма $ABCD$ взяты точки K и L так, что $BK : KC = CL : LD$. Докажите, что точка пересечения медиан $\triangle AKL$ лежит на диагонали BD.

6. Центрально симметричная фигура на клетчатой бумаге состоит из n «уголков» и k прямоугольников 1×4 (примеры на рисунке). Докажите, что n чётно.



Центр масс

1. Старый пират зарыл клад на острове среди 20 деревьев. После этого он написал завещание, в котором указал, как искать клад: надо встать к первому дереву, пройти половину расстояния до второго дерева, затем повернуть к третьему и пройти треть расстояния до него, и т. д., наконец, повернуть к двадцатому и пройти двадцатую часть расстояния до него. К сожалению, пират забыл указать, как занумерованы деревья! Сколько разных ям придётся выкопать потомкам пирата, чтобы всё-таки найти клад?
Если сразу не получается, решите более простые варианты задачи:
а) для двух деревьев; **б)** для трёх деревьев; **в)** для n деревьев на прямой.

Центр масс: координатное определение.
Пусть $m_1, \dots, m_n$ — положительные числа («массы»), $A_1, \dots, A_n$ — точки (на прямой, на плоскости или в пространстве), заданные координатами. **Центр масс** системы $\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ m_1 & \dots & m_n \end{pmatrix}$ — это точка

$$\mathbf{C}\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ m_1 & \dots & m_n \end{pmatrix} = \frac{m_1A_1 + \ldots + m_nA_n}{m_1 + \ldots + m_n}$$

(умножение точки A_i на число m_i и сложение точек m_iA_i и m_jA_j происходит покоординатно).
1. Физический смысл центра масс. Пусть к точкам $A_1, \dots, A_n$, лежащим на невесомой пластине, привязаны гирьки с массами $m_1, \dots, m_n$. Тогда центр масс этой системы — та точка, в которую надо поставить остриё карандаша, чтобы пластина находилась в равновесии.
2. Можно допустить и отрицательные массы, но важно, чтобы $m_1 + \ldots + m_n \neq 0$.
3. На геометрическом языке операции сложения и умножения на число проводятся с векторами, а не с точками. При выборе системы координат точку A можно отождествить с вектором $\overrightarrow{OA}$.
4. Центр масс — *аффинное* понятие: оно не зависит от выбора системы координат. Например, центр масс двух точек A и B с единичными массами — это всегда середина отрезка AB.

2. Теорема (правило рычага). Центр масс системы $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$ лежит на отрезке A_1A_2 и делит его в отношении $m_2 : m_1$, считая от вершины A_1 (отношение масс обратно пропорционально отношению плеч).

Теорема (о группировке масс). Пусть

$$M = \mathbf{C}\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n & B_1 & \dots & B_k \\ m_1 & \dots & m_n & p_1 & \dots & p_k \end{pmatrix}, \; B = \mathbf{C}\begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_k \\ p_1 & \dots & p_k \end{pmatrix}.$$

Тогда $M = \mathbf{C}\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n & B \\ m_1 & \dots & m_n & p_1 + \dots + p_k \end{pmatrix}$. Иначе говоря, если в некоторой системе заменить часть точек на их центр масс и поместить туда массу, равную сумме масс исходных точек, то центр масс всей системы не изменится.
Докажите с помощью центра масс следующие теоремы.

3. Теорема Чевы. Пусть на сторонах AB, BC и AC взяты точки P, Q и R. Отрезки CP, AQ и BR пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1.$$

4. Теорема Ван Обеля. Пусть на сторонах AB, BC и AC взяты точки P, Q и R так, что отрезки CP, AQ и BR пересекаются в точке K. Тогда

$$\frac{AK}{KQ} = \frac{AP}{PB} + \frac{AR}{RC}.$$

5. Теорема Менелая. Пусть на сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки P и Q, а на продолжении стороны AC за точку C — точка R. Тогда точки P, Q и R лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1.$$

6. На сторонах BC и CD паралеллограмма $ABCD$ взяты точки K и L так, что $BK : KC = CL : LD$. Докажите, что точка пересечения медиан $\triangle AKL$ лежит на диагонали BD.