Вероятность и комбинаторика

Малый мехмат МГУ

21 ноября 2020 г.

Let's Make a Deal

В некоторой игре ведущий предлагает играющему угадать, за какой из трёх закрытых дверей находится автомобиль. Игрок заранее знает, что за двумя другими дверями находятся козы. Он наугад выбирает одну из дверей. После этого ведущий (зная, где находится автомобиль) открывает одну из двух других дверей, за которой коза, причём игрок знает, что ведущий обязательно откроет дверь, за которой коза. Далее ведущий предлагает играющему две возможности: изменить своё решение и выбрать другую закрытую дверь, или же по-прежнему настаивать на первоначально выбранной двери. Как лучше поступить играющему?

Голосование

1) Нет разницы: если изменить решение, вероятность не изменится.
2) Лучше поменять решение.
3) Лучше не менять решение.
4) Воздержусь.

Увеличим число дверей

Пусть всего дверей сто, за одной из них автомобиль, за остальными — козы.
После выбора играющего ведущий открывает 98 дверей (!!!), за которыми козы. Остаётся опять же две двери.
Вы бы на месте играющего изменили решение?

Парадокс Монти Холла

Пример со ста дверями показывает, что лучше изменить решение. В самом деле, пусть играющий заранее решил, что не изменит решение. Тогда для ста дверей он выиграет автомобиль с вероятностью $1/100$ для ста дверей, а для трёх дверей — с вероятностью $1/3$. Значит, **лучше поменять решение.**

Почему парадокс? Казалось бы, мы и так знали, что за одной из оставшихся дверей коза, и ведущий обещал заранее, что откроет такую дверь. Так почему же лучше поменять решение? Сразу не всегда очевидно.

Парадокс дней рождений

В классе учатся 23 человека. Что вероятнее: что найдутся два школьника, у которых дни рождения приходятся на одну дату, или наоборот? (Високосными годами пренебречь; считаем, что в году 365 дней.)

Парадокс дней рождений: формализация задачи

Рассмотрим список из 23 дат; каждая дата — одна из 365-ти. Вопрос: списков, в которых есть повторяющиеся даты, больше или меньше половины?

Считаем списки дат

Сколько всего списков дат длины 23?
Сколько из них тех, в которых все даты различны?

Считаем списки дат

Сколько всего списков дат длины 23?

Ответ: 365^{23}

Сколько из них тех, в которых все даты различны? Ответ: $\underbrace{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 343}_{23 \text{множителя}}$

Решение вопроса

$$\text{Вопрос: } \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 343}{365^{23}} < \frac{1}{2}?$$

Да, дробь слева равна $0{,}493\ldots$.

Итак, для класса из 23 школьников вероятнее, что у кого-то дни рождения в один день!

А если бы школьников было 22?

А тогда вероятнее, что у всех дни рождения в разные дни:

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 344}{365^{22}} = 0{,}524\ldots > \frac{1}{2}.$$

Задача попроще

Сколькими способами можно прочитать слово СТРОКА, двигаясь по буквам вниз и вправо?

С Т Р О К А
Т Р О К А
Р О К А
О К А
К А
А

Покраска забора

Забор состоит из ста досок, стоящих в ряд. Тётушка Полли поручила Тому Сойеру покрасить каждую доску в один из цветов: красный, жёлтый, синий, зелёный, при этом соседние доски должны быть непременно покрашены в разные цвета. Скольками способами Том может выполнить задание?

Покраска забора

Первую доску можно покрасить в любой из четырёх цветов, а каждую следующую — в любой, кроме цвета предыдущей, т. е. в любой из трёх. Поэтому ответ: $4 \cdot 3^{99}$.

Покраска забора: задача посложнее

Забор состоит из ста досок, стоящих по кругу. Тётушка Полли поручила Тому Сойеру покрасить каждую доску в один из цветов: красный, жёлтый, синий, зелёный, при этом соседние доски должны быть непременно покрашены в разные цвета. Сколькими способами Том может выполнить задание?

В чём проблема с круговым забором?

Если рассуждать, как раньше, то возникнет проблема с сотой доской: не ясно, сколько для неё возможностей — две или три — это зависит от того, покрашены 1-я и 99-я доски в разные цвета или в один.

Решение с круговым забором

Обозначим ответ для забора из n досок через x_n и найдём его при малых n. Очевидно, $x_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2$. Далее возьмём $n = 4$. Если записать ответ $4 \cdot 3^3$, то мы ошибочно посчитаем те заборы, в которых первая и четвёртая доски покрашены в один цвет. Но можно считать, что это просто заборы из трёх досок, а их число мы знаем, это x_3. Итак, $x_4 = 4 \cdot 3^3 - x_3$. Аналогично, $x_5 = 4 \cdot 3^4 - x_4$ и, вообще, $x_n = 4 \cdot 3^{n-1} - x_{n-1}$. Выражая теперь x_{n-1} через x_{n-2} и так спускаясь до x_3, мы получим знакопеременную сумму:

$$x_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 4 \cdot 3^{n-2} + 4 \cdot 3^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-1} 4 \cdot 3 \cdot 2.$$

(Чтобы не запутаться в знаке последнего слагаемого, подставьте $n = 4$.)

Решение с круговым забором

Последнее слагаемое x_3 удобно записать как $4 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1$, после чего останется просуммировать геометрическую прогрессию

$$x_n = 4 \cdot (3^{n-1} - 3^{n-2} + 3^{n-3} - \ldots + (-1)^n 3).$$

Её знаменатель, если смотреть справа налево, равен -3, поэтому она «сворачивается» множителем $-3-1$ — домножим и разделим на него:

$$x_n = 4 \cdot \frac{-3^n - (-1)^n 3}{-3-1} = 3^n + 3 \cdot (-1)^n.$$

Ответ: $3^{100} + 3$.

Разбиение на группы

Сколькими способами можно разбить: **а)** четырёх человек на две пары; **б)** десять человек на пять пар; **в)** десять человек на две равные команды; **г)** девять человек на три тройки?

(Пункты в и г посложнее.)

Простая, но важная задача на вероятность

Монету подбрасывают два раза. Какова вероятность выпадения **а)** двух орлов; **б)** орла и решки?

Задачи с бросанием кубика

Бросают два игральных кубика. Какова вероятность: **а)** выпадения дубля; **б)** того, что сумма выпавших чисел не меньше 9; **в)** того, что сумма выпавших чисел равна 8, а разность — 4?

Экзамен

Десять учеников стоят перед экзаменом у дверей класса. Сначала на столе лежат 10 различных билетов. Каждый должет зайти и взять один из оставшихся. Миша не знает один из этих 10 билетов. Какова вероятность того, что именно этот билет ему попадётся, если Миша зайдёт **а)** первым; **б)** последним; **в)** шестым?

Ещё один эксперимент с бросанием монеты

Один бросил монету 10 раз, другой — 11. Чему равна вероятность того, что у второго монета упала орлом больше раз, чем у первого?

Решение

Исходом является пара наборов длины 10 и 11, заполненных О и Р. Возьмём два таких набора. Пусть в первом x орлов и соответственно $10 - x$ решек, а во втором y орлов и $11 - y$ решек. Спрашивается, какова вероятность того, что $x < y$, или какова доля пар наборов, в которых $x < y$, среди всех пар наборов. Заметим, что если мы заменим в условии слово «орлы» на слово «решки», то ответ, очевидно, не изменится, т. е. количества пар наборов, в которых $x < y$ и в которых $10 - x < 11 - y$, одинаковы. В то же время, и это — ключевая идея,

$$10 - x < 11 - y \Leftrightarrow 10 - x \leqslant 10 - y \Leftrightarrow x \geqslant y.$$

Таким образом, события $x < y$ и $x \geqslant y$ равновероятны. Поскольку они взаимоисключающие и одно из них непременно имеет место, то вероятности обоих равны $1/2$.