Кратчайший путь

Малый мехмат МГУ

10 октября 2020 г.

Задача для затравки

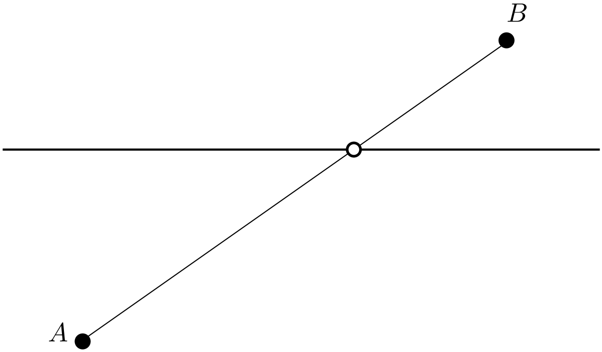
Красной Шапочке нужно дойти от своего дома A до шоссе, дождаться там развозчика пирожков, купить пирожок и принести его бабушке, живущей в доме B по ту же сторону от шоссе. Начертите самый короткий путь Красной Шапочки.

Задача попроще

А если бы бабушка жила по другую сторону шоссе?

Задача попроще

Тогда проще простого.

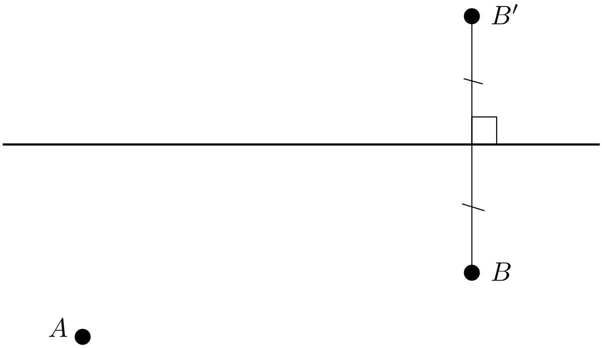


Возвращаем бабушку на место

Есть идеи?

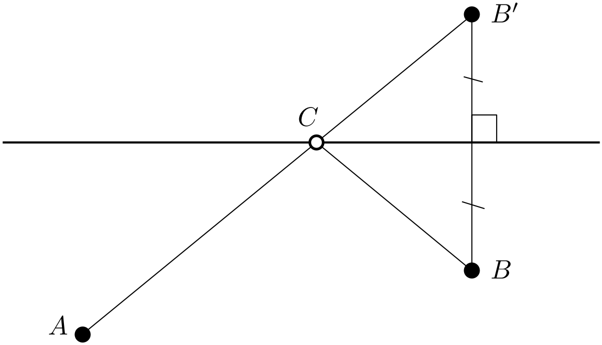
Рассмотрим обеих бабушек

Рассмотрим дом B', симметричный дому B относительно шоссе.



Рассмотрим обеих бабушек

Для точки B' задача очевидна. В случае дома B сделаем остановку на шоссе в том же месте C, что и для B'.

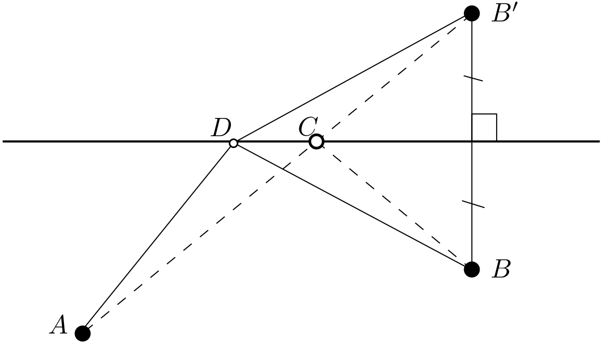


Маршруты ACB' и ACB одной длины.

Обоснование

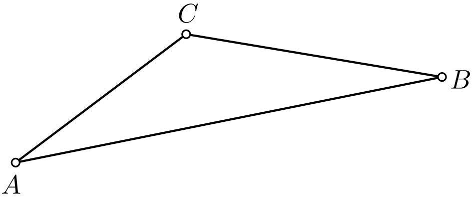
Возьмём на шоссе нашу точку C и любую точку D. Докажем, что $AD + DB \geqslant AC + CB$:

$AD + DB = AD + DB' \geqslant AB' = AC + CB'$



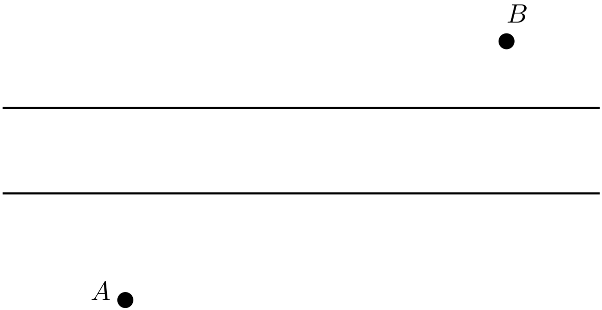
Неравенство треугольника

$AB + BC \geqslant AC$ и равенство достигается тогда и только тогда, когда точка B лежит на отрезке AC.



Переход рва

Путнику нужно попасть из пункта A в пункт B, расположенные по разные стороны от рва. У путника есть дощечка, длина которой равна ширине рва: её можно положить поперёк рва (перпендикулярно) и перейти по ней. Покажите, где расположить дощечку, чтобы путь из A в B был кратчайшим.

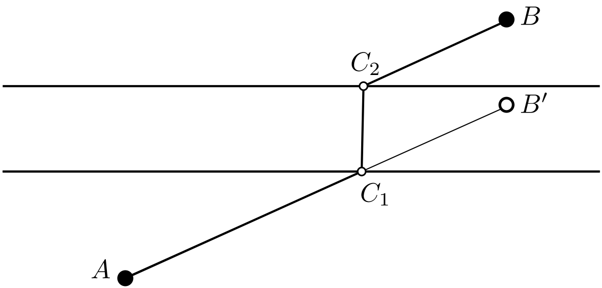


Идея

Рассмотрим вырожденный случай, когда ров имеет ширину 0. Тогда надо просто идти по прямой от A к B.
Как свести общий случай к вырожденному? Нижний берег рва делит картинку на две части. Опустим верхнюю часть вниз на ширину рва (тогда берега сольются).

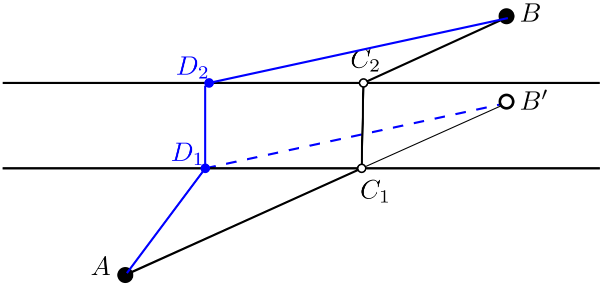
Сведение общего случая к вырожденному

$BB' = C_1C_2$ — ширина рва. Точка C_1 пересечения AB' с нижним берегом рва — искомая.



Обоснование

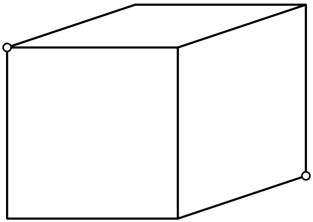
Поставим дощечку D_1D_2 в любом другоме месте и покажем, что $AD_1 + D_2B \geqslant AC_1 + C_2B$:
$AD_1 + D_2B = AD_1 + D_1B' \geqslant AB' = AC_1 + C_2B$



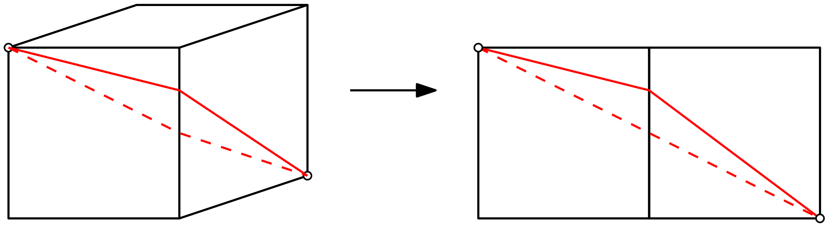
Маршрут жука

В музее Гугенхайм в Нью-Йорке есть скульптура, имеющая форму куба. Жук, севший на одну из вершин, хочет как можно быстрее осмотреть скульптуру и перейти к другим экспонатам (для этого достаточно попасть в противоположную вершину куба). Какой путь ему выбрать?

Маршрут жука

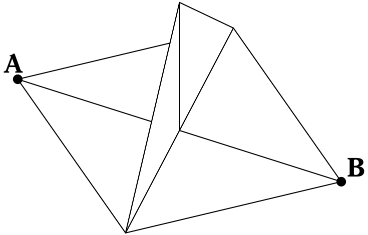


Идея: развернём маршрут на плоскость



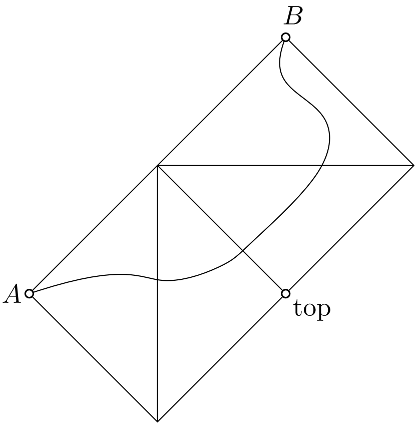
Умный в гору не пойдёт?

В вершине A квадрата со стороной 1 сидит муравей. Ему надо добраться до точки B — вход в муравейник. Точки A и B разделяет треугольная стена, боковые стороны которой тоже равны 1. Найдите длину кратчайшего пути, который надо преодолеть муравью, чтобы попасть в муравейник.



Умный гору обойдёт

Развернём маршрут муравья на плоскость (top — вершина треугольной стены):



Теперь ясно, что надо обходить гору.

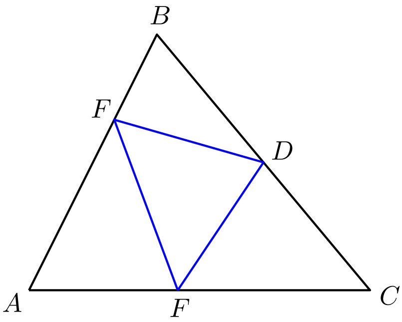
Задача Фаньяно

Фаньяно деи Тоски (1682–1766), итальянский математик и инженер, поставил задачу:
вписать в данный остроугольный треугольник другой треугольник с наименьшим периметром

Задача Фаньяно

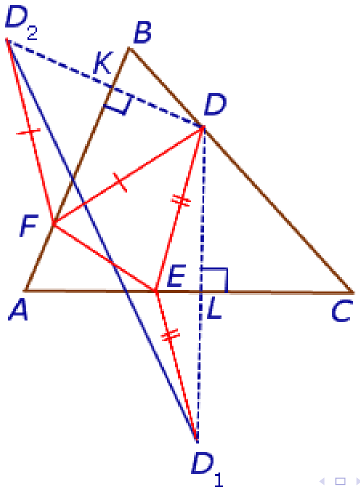
$\triangle ABC$ остроугольный

$P_{DEF} = DE + EF + DF \to \min$



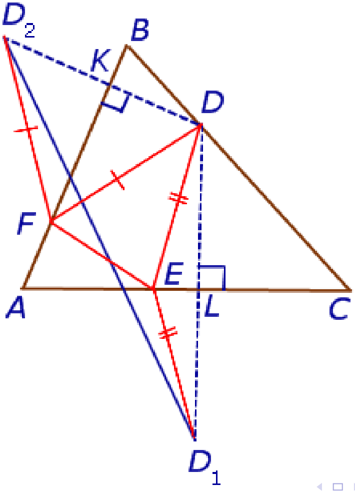
Задача Фаньяно

Пусть $\triangle DEF$ вписан в остроугольный $\triangle ABC$. Отразив точку D относительно AB и AC, получим ломаную D_1EFD_2 длины, равной P_{DEF}.



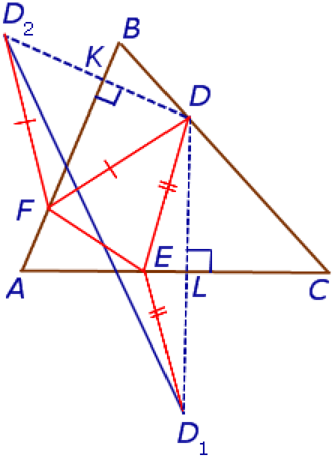
Задача Фаньяно

Выпрямим ломаную D_1EFD_2 в отрезок D_1D_2. Выберем точку D так, чтобы длина D_1D_2 была наименьшей.



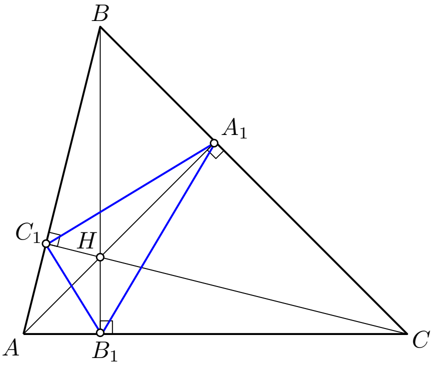
Задача Фаньяно

При любом положении точки $D \in BC$ треугольник D_1AD_2 равнобедренный: $D_1A = DA = D_2A$, и $\angle D_1AD_2 = 2\angle CAB$ (почему?). Поэтому D_1D_2 минимальна $\Leftrightarrow$ AD минимальна $\Leftrightarrow$ AD — высота. Аналогично BE и CF – высоты.



Теорема Фаньяно

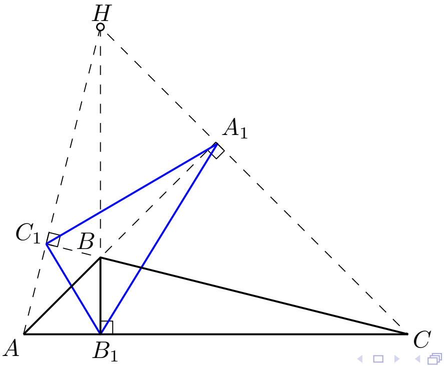
Среди всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, наименьший периметр имеет **ортотреугольник**, т. е. треугольник, образованный основаниями высот.



$\triangle A_1B_1C_1$ — ортотреугольник и H — ортоцентр для $\triangle ABC$

Ортоцентр и ортотреугольник для неостроугольного треугольника

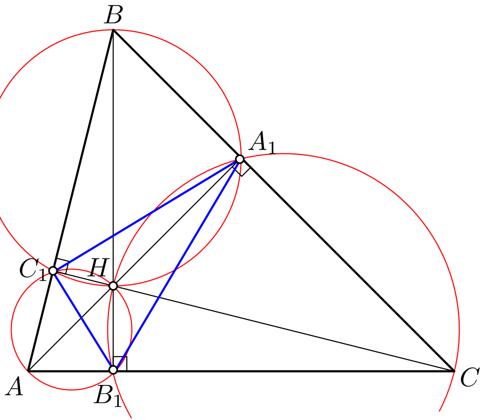
Для прямоугольного треугольника ортоцентр — вершина прямого угла, а ортотреугольник вырождается в высоту, опущенную на гипотенузу.
Для тупоугольного треугольника ABC с $\angle B > 90^\circ$ ортоцентр H лежит вне треугольника, а ортотреугольник — такой же, как для остроугольного $\triangle AHC$.



Самостоятельное исследование

1) Почему для остроугольного $\triangle ABC$ отрезок D_1D_2 пересекает стороны AB и AC (а не их продолжения)?
2) Исследовать задачу Фаньяно для прямоугольного и тупоугольного треугольников.

Некоторые свойства ортотреугольника



1) Высоты треугольника содержат биссектрисы его ортотреугольника.
2) Четырёхугольники на рисунке вписанные.

Точка Ферма

Точка Ферма треугольника — это точка, сумма расстояний от которой до его вершин минимальна.

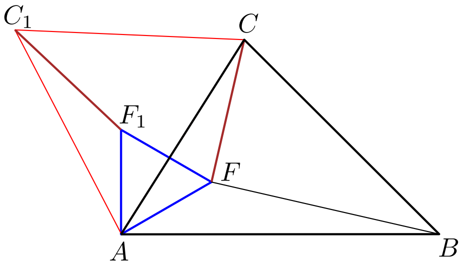
Точка Ферма: вырожденный случай

Пусть $\triangle ABC$ выродился в отрезок, B лежит между A и C. Где тогда точка Ферма?

Точка Ферма: повернём, чтобы выпрямить

Пусть F — искомая точка. Повернём рисунок вокруг точки A на 60°:

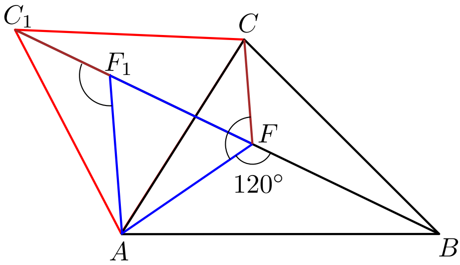
$$FB + FA + FC = BF + FF_1 + F_1C_1 \geqslant BC_1$$



Точка Ферма: повернём, чтобы выпрямить

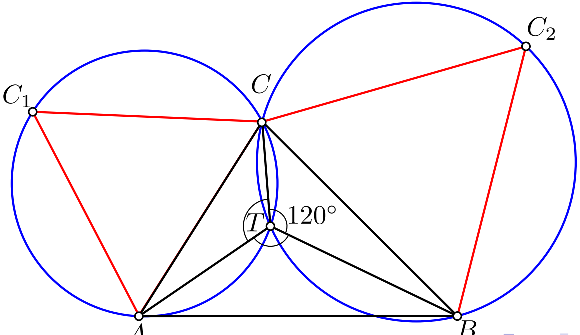
BFF_1C_1 — одна прямая

$\Leftrightarrow \angle C_1F_1A = \angle CFA = 120^\circ = \angle AFB$



Точка Торичелли

Это точка T, из которой все стороны треугольника видны под углом 120°.
Точка T существует $\Leftrightarrow$ все углы треугольника меньше 120°. Тогда T — вторая (кроме C) точка пересечения окружностей, описанных около правильных треугольников ACC_1 и BCC_2.



Теорема Ферма–Торичелли–Штейнера

Если все углы треугольника меньше 120°, то точка Торичелли существует и совпадает с точкой Ферма. В противном случае точка Торичелли не существует, а точка Ферма совпадает с вершиной тупого угла.

Сеть Штейнера

Задача: построить систему дорог наименьшей суммарной длины, связывающую данные n точек на плоскости (название: сеть Штейнера).

Можно показать, что для треугольника такую систему образуют дороги, соединяющие вершины треугольника с точкой Торичелли.
Какова сеть Штейнера для квадрата?

Сеть Штейнера для квадрата