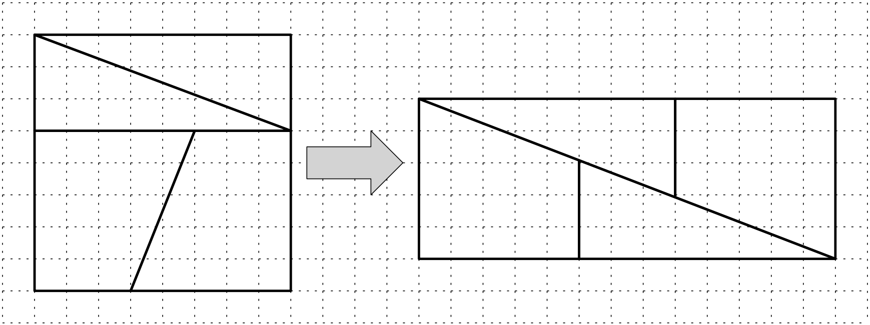
Софизмы

Малый мехмат МГУ

14 ноября 2020 г.

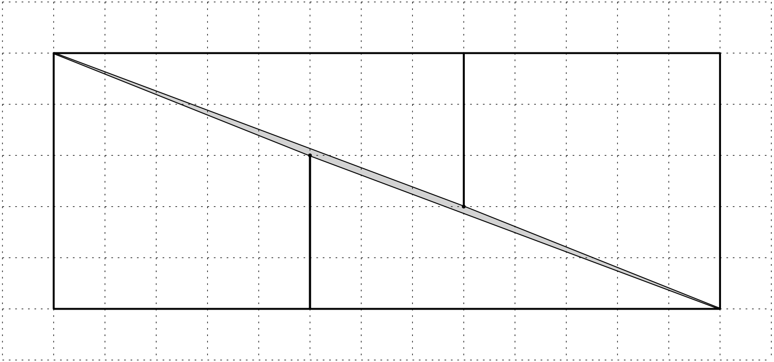
$64 = 65$

Квадрат 8×8 разрезали на многоугольники, из которых сложили прямоугольник 5×13 (см. рисунок). Откуда взялась лишняя клетка?



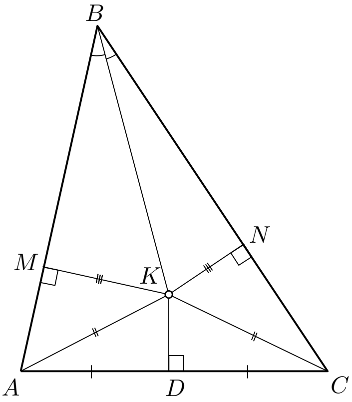
$64 + 1 = 65$

Всё дело в разнице угловых коэффициентах: $5/2$, $8/3$, $13/5$, поэтому границы треугольников и трапеций не сливаются в диагональ прямоугольника, а образуют прорезь в виде параллелограмма площади как раз одна клетка.

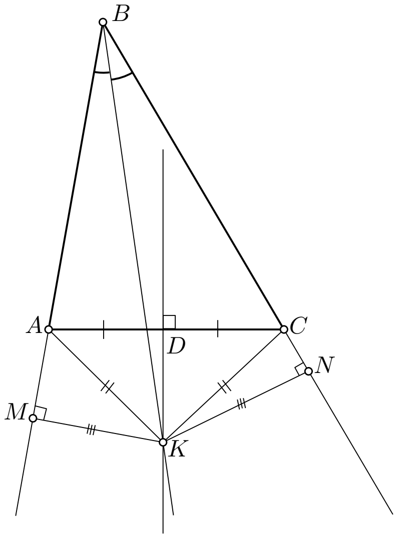


«Теорема»: все треугольники — равнобедренные.

Возьмём произвольный треугольник ABC. Пусть биссектриса угла B и серединный перпендикуляр к стороне AC пересекаются в точке K. По свойству серединного перпендикуляра $AK = KC$, а по свойству биссектрисы перпендикуляры KM и KN на стороны AB и AC равны. Отсюда $\triangle MKA = \triangle NKC$ и $\triangle MKB = \triangle NKB$ (по катету и гипотенузе), откуда $AM = CN$ и $MB = NB$. Складывая эти равенства, получаем $AB = BC$.



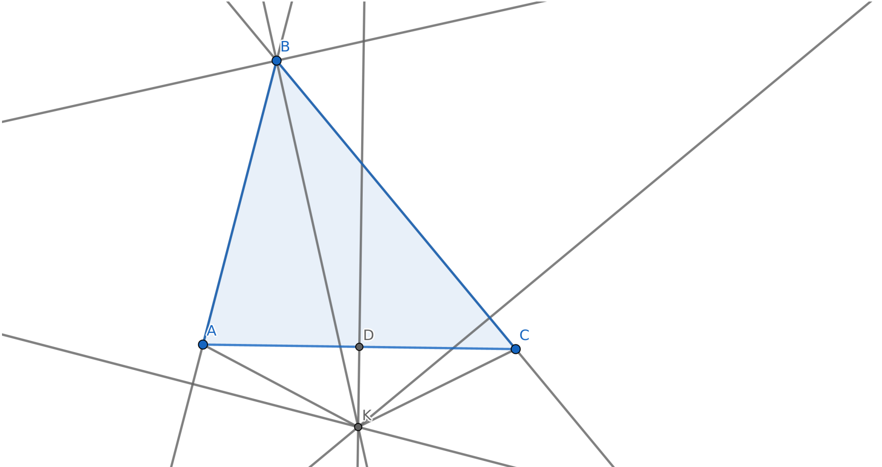
Если точка K вне треугольника.



Тогда вычитаем равенства: $MB = BN$, $AM = CN \Rightarrow AB = BC$.

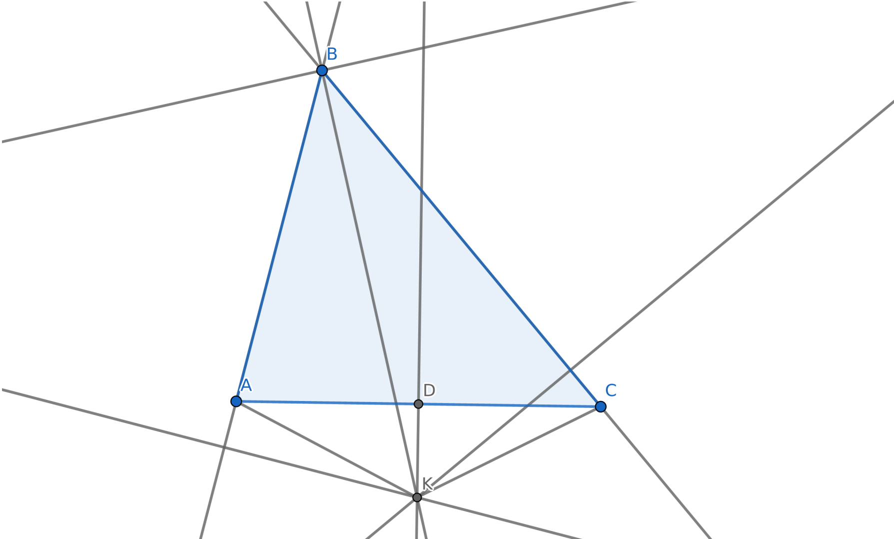
Где же ошибка?

Точка действительно снаружи, но одна её проекция попадает на сторону треугольника, а другая — на продолжение стороны. Соответственно, $AB = MB - MA$ и $BC = BN + NC$ или наоборот.



Задача

Докажите, что точка K лежит на окружности, описанной около $\triangle ABC$.



«Теорема»: все лошади одной масти

Докажем индукцией по числу n лошадей. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть любые $n - 1$ лошадей одной масти, и нам даны n лошадей:

$$1, 2, \dots, n - 1, n.$$

Лошади с 1-й по $(n - 1)$-ю одной масти, лошади со 2-й по n-ю тоже одной масти. Значит, все лошади с 1-й по n-ю одной масти.

Где ошибка?

Сделайте шаг индукции от 1 к 2.

Незаметное преобразование

$$x = 1 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x \cdot x^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 \cdot x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Откуда лишний корень?

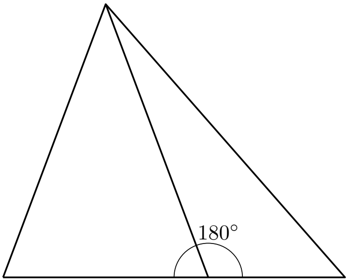
После подстановки $x = 1$ в равенство $x \cdot x^2 = 1$ вместо первого множителя теряется само условие $x = 1$. При подстановке оно должно оставаться в системе:

$$\begin{cases} x \cdot x^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot x^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Простое «доказательство»

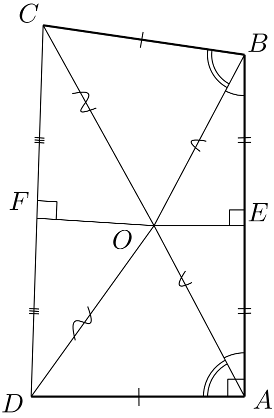
Докажем, что сумма углов любого треугольника равна 180°. В самом деле, обозначим эту сумму через S. Разделим треугольник на два, как на рисунке. Сложив углы полученных двух треугольников, с одной стороны, получим $2S$, а с другой — сумму углов большого треугольника плюс величину развёрнутого угла. Итак,

$$2S = S + 180^\circ \Rightarrow S = 180^\circ.$$

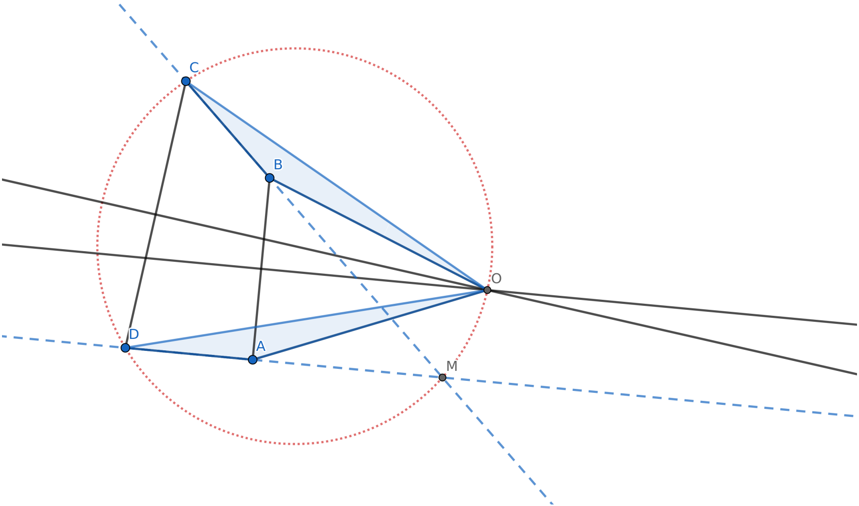


«Теорема»: $90^\circ = 91^\circ$

Возьмём четырёхугольник $ABCD$ с $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 91^\circ$ и $AD = BC$. Тогда $AB \nparallel CD$ (иначе $ABCD$ — равнобедренная трапеция с неравными углами A и B при основании). Тогда серединные перпендикуляры к AB и CD тоже не параллельны. Пусть они пересекаются в точке O. Тогда $OA = OB$ и $OC = OD$ и $\angle OBA = \angle OAB$. Далее $\triangle OAD = \triangle OBC$ по трём сторонам, откуда $\angle OAD = \angle OBC$. Складывая равенства углов, получим $90^\circ = \angle BAD = \angle ABC = \angle 91^\circ$.



Где на самом деле точка O и что с углами?



$\angle ABC = 360^\circ - \angle OBA - \angle OBC$, $\angle BAD = \angle OAD - \angle OAB$.

Задача

Докажите, что точка O лежит на окружностях, описанных около $\triangle MCD$ и $\triangle MAB$, где M — точка пересечения прямых AD и BC.