Симметрические многочлены

Малый мехмат МГУ

17 октября 2020 г.

Задача для затравки

При каждом $a \in \mathbb{R}$ решите систему

$$\begin{cases} x + y + z = 3a \\ xy + xz + yz = 3a^2 \\ xyz = a^3 \end{cases}$$

Угадаем решение

$$\begin{cases} x + y + z = 3a \\ xy + xz + yz = 3a^2 \\ xyz = a^3 \end{cases}$$

$x = y = z = a$ подходит.

Есть ли другие решения?

Элементарные симметрические многочлены

В случае двух переменных x и y таких многочленов два. По определению это $x + y$ и xy. Они возникают в разложении

$$(t - x)(t - y) = t^2 - (x + y)t + xy$$

Элементарные симметрические многочлены

Для трёх переменных их три: $x + y + z$, $xy + xz + yz$ и xyz. Аналогично,

$$(t - x)(t - y)(t - z) =$$

$$= t^3 - (x + y + z)t^2 + (xy + xz + yz)t - xyz$$

Решение задачи для затравки

В силу системы

$$\begin{cases} x + y + z = 3a \\ xy + xz + yz = 3a^2 \\ xyz = a^3 \end{cases}$$

$$(t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - 3at^2 + 3a^2 t - a^3$$

Узнаёте правую часть?

Узнаём правую часть

$$t^3 - 3at^2 + 3a^2t - a^3 = (t-a)^3.$$

Итак,

$$(t-x)(t-y)(t-z) = (t-a)^3$$

Корни левой и правой частей

$$(t - x)(t - y)(t - z) = (t - a)^3$$

Левая часть обращается в 0 $\Leftrightarrow t \in \{x, y, z\}$, а правая часть — лишь при $t = a$. Значит, $x = y = z = a$ — единственное решение системы.

Задача

Пусть
$$\begin{cases} x + y + z = a \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a}. \end{cases}$$
Докажите, что хотя бы одно из чисел x, y, z равно a.

Решение

Второе уравнение имеет вид

$$\frac{xy + xz + yz}{xyz} = \frac{1}{a}.$$

Отсюда

$$(a - x)(a - y)(a - z) =$$

$$= a^3 - \underbrace{(x + y + z)}_{a}a^2 + \underbrace{(xy + xz + yz)a - xyz}_{0} = 0,$$

значит, хотя бы одна из разностей $a - x$, $a - y$, $a - z$ равна 0, что и требовалось.

Разминка

Пусть a и b — корни трёхчлена $x^2 - 10x + 12$.
Составьте квадратный трёхчлен с парой корней:

1) $-a$ и $-b$;
2) $a + b$ и ab;
3) $a + 1$ и $b + 1$;
4) a^2 и b^2.

Формулы Виета

$$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab =$$
$$= x^2 - 10x + 12 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=10 \\ ab=12. \end{cases}$$

1) $x^2 + 10x + 12 = 0$;
2) $(x-10)(x-12) = x^2 - 22x + 120$;
3) $(a+1) + (b+1) = 12$,
$(a+1)(b+1) = ab + a + b + 1 = 23$; $x^2 - 12x + 23$.
4) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 76$, $a^2 b^2 = 144$;
$x^2 - 76x + 144$.

Аналогичная задача для кубического многочлена

Пусть a, b, c — тройка корней многочлена $x^3 - 2x^2 + x + 1$. Составьте кубический многочлен с корнями ab, ac, bc.

Решение

$$x^3 - 2x^2 + x + 1 = (x-a)(x-b)(x-c) =$$

$$= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$$

$$\begin{cases} a+b+c = 2 \\ ab+ac+bc = 1 \\ abc = -1 \end{cases}$$

Чтобы составить многочлен с корнями ab, ac, bc, нужно составить аналогичную систему, в которой вместо чисел a, b, c будут ab, ac, bc.

Решение

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ ab+ac+bc=1 \\ abc=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} ab+ac+bc=?_1 \\ (ab)(ac)+(ab)(bc)+(ac)(bc)=?_2 \\ (ab)(ac)(bc)=?_3 \end{cases}$$

Тогда искомый многочлен

$$(x-ab)(x-ac)(x-bc)=x^3-?_1x^2+?_2x-?_3$$

Имеем $?_1=1$, $?_3=(abc)^2=1$,

$$?_2=abc(a+b+c)=-2.$$

Ответ: x^3-x^2-2x-1.

Числа на доске

На доске выписаны числа $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{100}$. За раз любые два числа a и b стирают и вместо них записывают число $a + b + ab$. С полученным набором чисел делают то же самое и так до тех пор, пока не останется одно число. Что это за число?

Исследуем операцию

$$a \otimes b = ab + a + b$$

Ясно, что $a \otimes b = b \otimes a$, т. е. операция $\otimes$ коммутативна. Будет ли она ассоциативной, т. е. верно ли тождество

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)?$$

Ассоциативность

Тождество можно проверить непосредственно: оба выражения $(a \otimes b) \otimes c$ и $a \otimes (b \otimes c)$ равны

$$abc + ab + ac + bc + a + b + c.$$

А можно заметить, что

$$a \otimes b = ab + a + b = (a+1)(b+1) - 1.$$

Отсюда при любой расстановке скобок

$$a \otimes b \otimes c = (a+1)(b+1)(c+1) - 1.$$

Решите теперь?

Решение

Вообще, для любых $x_1, \ldots, x_n$

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_n = (x_1 + 1) \ldots (x_n + 1) - 1.$$

Значит, на доске останется число

$$1 \otimes \frac{1}{2} \otimes \ldots \otimes \frac{1}{100} =$$

$$= (1 + 1) \left(\frac{1}{2} + 1\right) \ldots \left(\frac{1}{100} + 1\right) - 1 =$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{100}{99} \cdot \frac{101}{100} - 1 = 101 - 1 = 100.$$

Задача

Разложите на множители

$$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$$

Математика – наука для позитивно ленивых людей

Разложить на множители

$$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$$

можно по-разному:

1) $(x+y+z)^3 - x^3$ разложить как разность кубов, а $y^3 + z^3$ – как сумму кубов (тогда сразу можно вынести $y+z$).

2) Раскрыть скобки $(x+y+z)^3$ и затем группировать.

Есть хитрый третий способ.

Из способа 1) ясно, что
$F = (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ делится на $y+z$.
Аналогично F делится на $x+y$ и на $x+z$.
Поэтому

$$F = (x+y)(x+z)(y+z)G$$

для некоторого многочлена G.

Но G должен быть константой, так как $(x+y)(x+z)(y+z)$ – однородный многочлен степени 3 так же, как и F. Константу G можно найти, сравнив коэффициенты при каком-нибудь одночлене, например, при x^2y.

При раскрытии скобок $(x+y+z)^3$ одночлен x^2y получается тремя способами, а при раскрытии скобок $(x+y)(x+z)(y+z)$ — одним. Значит, коэффициент при x^2y в F равен 3, а в $(x+y)(x+z)(y+z)$ — 1. Значит, $G=3$. Итак,

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(x+z)(y+z).$$

Задача о делимости многочленов

Докажите, что при всех нечётных $n \geqslant 5$ многочлен $(x + y + z)^n - x^n - y^n - z^n$ делится на многочлен $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$. Выпишите частное явно при $n = 5$.

Задача о делимости многочленов

Воспользуемся полученным ранее разложением

$F = (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(x+z)(y+z).$

Значит, чтобы $G = (x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n$ делился на F, необходимо и достаточно, чтобы G делился на $x+y$, $x+z$ и $y+z$. Это равносильно тому, что G обращается в 0 при любой из подстановок $y = -x$, $z = -x$, $z = -y$. Это верно ввиду нечётности n. Например, если $y = -x$, то

$$G = z^n - x^n - (-x)^n - z^n = 0.$$

Обоснование: теорема Безу

Остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $x - a$ равен $f(a)$:

$$f(x) = q(x)(x - a) + f(a).$$

В частности, $f(x)$ делится на $x - a \Leftrightarrow f(a) = 0$.
Это можно применять для многочленов от нескольких переменных, фиксируя одну из переменных. Именно, пусть многочлен $F(x, y, \dots)$ обращается в тождественный 0 при подстановке $y = x$. Докажем, что он делится на $x - y$. Рассмотрим F как многочлен от x с параметрами $y, \dots$ и разделим его с остатком на $x - y$:

$$F(x, y, \dots) = q(x, y, \dots)(x - y) + F(y, y, \dots).$$

По условию многочлен $F(y, y, \dots)$ нулевой, значит, $F(x, y, \dots)$ делится на $x - y$.

Разложите самостоятельно

1) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$;

2) $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$.

Ответы

1) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$;
2) $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2=$
$=(x+y+z)(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)$.

Сраните 2) с формулой Герона площади треугольника со сторонами x, y, z и полупериметром $p=\frac{x+y+z}{2}$:

$$S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Задача

Сумма целых чисел a, b, c равна 0. Докажите, что $2(a^4 + b^4 + c^4)$ — полный квадрат.

Равносильная формулировка

При любых целых a, b

$$2(a^4 + b^4 + (a+b)^4)$$

– полный квадрат

Бином

$$(a+b)^4 = ?$$

Бином

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Преобразования

Почему это полный квадрат:

$$2(a^4+b^4+\underbrace{(a+b)^4}_{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4})=$$

$$=4(a^4+b^4+2a^3b+2ab^3+3a^2b^2)$$

Далее работаем с выражением в скобках – оно должно быть полным квадратом

Стандартный приём

Временно поделим на a^2b^2:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 3$$

и сделаем замену $t = \dfrac{a}{b}$:

$$\underbrace{t^2 + \frac{1}{t^2}}_{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2} + 2\left(t + \frac{1}{t}\right) + 3$$

Вот и полный квадрат

Обозначив $t + \dfrac{1}{t} = y$, получим

$$y^2 - 2 + 2y + 3 = y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2.$$

Возвращаемся к старым переменным:

$$t^2 + \frac{1}{t^2} + 2\left(t + \frac{1}{t}\right) + 3 = \left(t + \frac{1}{t} + 1\right)^2 =$$

$$= \frac{(a^2 + b^2 + ab)^2}{a^2 b^2}$$

Окончательно

$$a^4 + b^4 + 2a^3b + 2ab^3 + 3a^2b^2 = (a^2 + ab + b^2)^2$$

Значит, если $a + b + c = 0$, то

$$2(a^4 + b^4 + c^4) = (2a^2 + 2ab + 2b^2)^2.$$

Система

При каждом $a \in \mathbb{R}$ решите систему

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3. \end{cases}$$