1.1. Для всех положительных чисел a, b, c докажите неравенства:
а) $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$; **б)** $a^3 + b^3 \geqslant a^2 b + b^2 a$;
в) $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \leqslant 2(a^3 + b^3 + c^3)$.
г) Когда эти неравенства обращаются в равенства?

1.2. В левом нижнем углу доски 7×7 стоит *хромой король*. За ход он шагает на одну клетку вправо или вверх либо на одну клетку вправо-вверх. Двое ходят по очереди. Кто не может сделать хода — проиграл.
а) Каким может быть последний ход победителя? А проигравшего?
б) А какими могли быть их предпоследние ходы?
в) Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от ходов соперника? Какой стратегии он должен для этого придерживаться?

1.3. Внутри 15-угольника отметили 43 точки и соединили некоторые из них непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами 15-угольника так, что 15-угольник разбился на треугольники (с вершинами в отмеченных точках и в вершинах 15-угольника).
а) Чему равна сумма всех углов всех получившихся треугольников?
б) Сколько получилось треугольников?

1.4. Найдите: **а)** НОД(111 111, 11 111); **б)** НОД$(\underbrace{111\ldots11}_{99\text{ единиц}}, \underbrace{111\ldots11}_{100\text{ единиц}})$;
в) НОД$(\underbrace{111\ldots11}_{99\text{ единиц}}, \underbrace{111\ldots11}_{15\text{ единиц}})$; **г)** НОД$(\underbrace{222\ldots22}_{99\text{ двоек}}, \underbrace{111\ldots11}_{15\text{ единиц}})$.

1.5. а) В выпуклом четырёхугольнике провели отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, в результате чего четырёхугольник оказался разбит на 4 части. Докажите, что сумма площадей двух из них, не имеющих общих сторон, равна сумме площадей двух других.
б) Две прямые делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника на три равные части и не пересекаются внутри четырёхугольника. Докажите, что между этими прямыми заключена треть площади четырёхугольника.

1.6. Каждая из сторон выпуклого четырёхугольника разделена на три равные части, и соответствующие точки противоположных сторон соединены. Докажите, что: **а)** проведённые отрезки делятся точками пересечения на три равные части; **б)** проведённые отрезки делят четырёхугольник на 9 частей, площадь центральной из которых в 9 раз меньше площади исходного четырёхугольника.