Целые числа a и b называются ***сравнимыми по модулю*** *m, если они дают одинаковые остатки при делении на m.*
Обозначение: $a \equiv b \pmod{m}$.

Базовое свойство: $a \equiv b \pmod{m} \Longleftrightarrow (a-b) \vdots m$.

Основные свойства сравнений по модулю:

а) если $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$;
б) если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{m}$;
в) если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$;
г) если $a \equiv b \pmod{m}$ и n — натуральное число, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

3.1. Найдите наименьшее натуральное число, которое сравнимо:
а) с $17 + 23$ по модулю 29; **б)** с $42 - 67$ по модулю 71;
в) с $1 + 2 + 3 + \ldots + 49 + 50$ по модулю 51.

3.2. Верно ли, что: **а)** $100 \equiv 2 \pmod{7}$; **б)** $2023 \equiv 13 \pmod{41}$;
в) $\underbrace{11\ldots11}_{100 \text{ единиц}} \equiv 18 \pmod{48}$; **г)** $\underbrace{11\ldots11}_{100 \text{ единиц}} \equiv 1 \pmod{9}$? Ответы обоснуйте.

3.3. Верно ли каждое из следующих утверждений? Если да — докажите, если нет — приведите контрпример.
а) если $a \equiv b \pmod{m}$ и $a \equiv b \pmod{n}$, то $m = n$;
б) если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a - c \equiv b - d \pmod{m}$;
в) если $ka \equiv kb \pmod{m}$, то $a \equiv b \pmod{m}$;
г) если $ac \equiv bd \pmod{m}$ и $a \equiv b \pmod{m}$, то $c \equiv d \pmod{m}$.

3.4. Найдите остаток от деления: **а)** 8^{100} на 7; **б)** 8^{100} на 9; **в)** 8^{2023} на 11.

3.5. Докажите, что: **а)** $30^{99} + 61^{100} \vdots 31$; **б)** $43^{99} + 23^{99} \vdots 33$; **в)** $3^{100} - 2^{100} \vdots 5$.

3.6. **а)** Найдите остаток от деления $9^{121} + 13^{121}$ на 11.
б) Докажите, что число $8^{101} + 8^{102} + \ldots + 8^{107}$ делится на 7.
в) Делится ли число $3^{2020} + 3^{2022} + 3^{2024} + \ldots + 3^{2034}$ на 8?

3.7. Докажите, что $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 443 + 444 \cdot 445 \cdot 446 \cdot \ldots \cdot 886$ делится на 887.

3.8. Докажите, что среди 51 целого числа найдутся два, квадраты которых имеют одинаковый остаток при делении на 100.

3.9. Докажите, что $5^n + 1$ не делится на $5^m - 1$ ни при каких $n, m \in \mathbb{N}$.

3.10. В каком-то году некоторое число ни в одном месяце не было воскресеньем. Определите это число. Учтите, что год мог быть и високосным!