В субботу 4 ноября 2023 года занятий Малого мехмата МГУ не будет. Следующее занятие состоится в субботу 11 ноября 2023 года.

4.1. а) Основания трапеции равны 2 и 5, а диагонали — 3 и 6. Найдите длины отрезков, на которые каждая из диагоналей трапеции делится точкой пересечения диагоналей. **б)** Может ли одна из диагоналей какой-либо трапеции делить другую её диагональ пополам? **в)** Основания трапеции равны 4 и 9, а боковые стороны — 5 и 8. Боковые стороны продлили до их пересечения. На какую длину продлили каждую из боковых сторон?

4.2 (*замечательное свойство трапеции*)**.** Докажите, что точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований любой трапеции лежат на одной прямой.

*В следующих задачах будем называть **хорошим** отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный её основаниям.*

4.3. а) Докажите, что хороший отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции, делится этой точкой пополам.

б) Хороший отрезок делится диагоналями трапеции на три части. Докажите, что прилежащие к боковым сторонам трапеции части равны.

в) Хороший отрезок делится диагоналями на три равные части. В каком отношении концы этого отрезка делят боковые стороны трапеции, если её основания равны a и b?

4.4. а) Основания трапеции равны 5 и 13. Найдите длину хорошего отрезка, который делит боковую сторону трапеции в отношении $1 : 3$, считая от концов меньшего основания. **б)** Найдите длину отрезка MN, концы которого делят боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ ($BC = a$, $AD = b$) в заданном отношении $AM : MB = DN : NC = p : q$. **в)** Докажите, что чем ближе хороший отрезок к меньшему основанию данной трапеции, тем он короче.

4.5. Найдите длину хорошего отрезка в трапеции с основаниями a и b:

а) проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции;

б) делящего площадь трапеции пополам;

в) делящего трапецию на две подобные трапеции (у которых соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны).

г) Докажите геометрически *неравенство о средних*: для любых $0 < a \leqslant b$

$$a \leqslant \frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leqslant b$$

(меньшее из чисел $\leqslant$ ср. гармоническое $\leqslant$ ср. геометрическое $\leqslant$ ср. арифметическое $\leqslant$ ср. квадратическое $\leqslant$ большее из чисел, причём все неравенства обращаются в равенство достигаются одновременно и только при $a = b$).