

Последнее занятие Малого мехмата МГУ в 2023 году состоится в субботу 16.12.2023 по обычному расписанию. Приходите!

В 2024 году занятия планируется возобновить в феврале. Следите за объявлениями на сайте Малого мехмата mmmf.msu.ru и в Discord.

9.1. а) В классе 35 учеников. Докажите, что среди них найдутся хотя бы двое, у которых фамилия начинается с одной буквы.

б) При каком наименьшем количестве учеников в школе среди них обязательно найдутся двое, у которых день и месяц рождения совпадают?

9.2. а) 34 пассажира едут в автобусе, который делает 9 остановок, причем на этих остановках новые пассажиры не заходят. Докажите, что на каких-то двух остановках выйдет одинаковое число пассажиров (может быть, ни одного). **б)** Докажите, что в компании из 10 человек найдутся двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании (возможно, ни одного). **в)** У Кости 28 одноклассников, причем у них у всех разное число друзей в этом классе. А сколько друзей в классе у самого Кости?

9.3. а) 100 человек сидят за круглым столом, причем более половины из них — мужчины. Докажите, что какие-то двое мужчин сидят напротив друг друга. **б)** На плоскости проведено n прямых, никакие две из которых не параллельны. Докажите, что найдутся две из них, угол между которыми не больше, чем $\frac{180^\circ}{n}$.

9.4. Дан правильный 45-угольник. Можно ли в его вершинах расставить цифры от 0 до 9 так, чтобы для любой пары цифр нашлась сторона, концы которой занумерованы этими цифрами? Каждую цифру можно использовать несколько раз, но в каждую вершину ставится только одна цифра.

9.5. а) Докажите, что среди любых $n + 1$ натуральных чисел найдутся два числа, разность которых делится на n . **б)** Верно ли, что среди любых 7 натуральных чисел найдутся три, сумма которых кратна 3? **в)** Докажите, что среди любых n целых чисел всегда найдутся несколько (или, быть может, одно), сумма которых делится на n .

9.6. а) В прямоугольнике 3×4 расположены 6 точек. Докажите, что среди них найдутся две, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{5}$. **б)** Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 расположено 5 точек. Докажите, что расстояние между какими-то двумя из них меньше $\frac{1}{2}$. **в)** Дано 7 отрезков, длины которых заключены между $\frac{1}{10}$ и 1. Докажите, что среди этих отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник.

9.7. Никита разрезал прямоугольный лист бумаги по прямой. Затем он разрезал по прямой один из получившихся кусков. Затем он проделал то же самое с одним из трех получившихся кусков, и т.д. Докажите, что через несколько разрезов среди полученных многоугольников найдется 100 штук с одинаковым числом вершин.

9.8. Докажите, что среди чисел, записываемых **а)** единицами и нулями; **б)** только единицами, есть число, которое делится на 2023.

9.9. Сумма 100 натуральных чисел, каждое из которых не больше 100, равна 200. Докажите, что из них можно выбрать несколько (или, быть может, одно) чисел, сумма которых равна 100.