

Малый мехмат, 9 класс. 2023/2024 год. Занятие 10 (16.12.2023). Игра «Карусель». Задачи

1. Угол равнобедренного треугольника равен 30° . Найдите два остальных его угла.
2. За 30 минут Иван Иванович может 5 раз подняться с первого этажа на 3 этаж и спуститься оттуда на первый. За сколько минут Иван Иванович сможет 4 раза подняться с первого этажа на 4 этаж и спуститься оттуда на первый, если считать, что Иван Иванович идёт с одинаковой скоростью независимо от этажа, но, возможно, с разной скоростью вверх и вниз?
3. Найдите остаток от деления 2023^{2023} на 2024
4. Маша выписывает последовательно на доску по возрастанию все числа, в которых число четных цифр равно числу нечетных цифр. Какое число выпишет Маша 46-м?
5. Улитка заползла на вершину бамбука, который растет так, что каждая его точка поднимается вверх с одной и той же скоростью. Путь вверх занял у улитки 7 часов. Отдохнув на вершине бамбука ровно час, она спустилась на землю за 8 часов. Во сколько раз скорость улитки больше скорости роста бамбука (скорости постоянны)?
6. По двум пересекающимся дорогам с равными постоянными скоростями движутся автомобили Ауди и БМВ. Оказалось, что как в 17:00, так и в 18:00 БМВ находился в два раза дальше от перекрестка, чем Ауди. В какое время Ауди мог проехать перекресток? Укажите все возможные варианты.
7. Сколько существует трёхзначных чисел, у которых сумма цифр больше произведения цифр
8. Грузчики Коля и Петя носят ящики. Переноска маленького ящика занимает у Пети 1 минуту, а у Коли 3 минуты. Зато большой ящик Коля переносит за 5 минут, а Петя — за 6. Всего им нужно перенести 10 больших и 10 маленьких ящиков. За какое наименьшее время они могут это сделать?
9. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_{n+2} = (x_{n+1})^2 : x_n$. Найдите x_{17} .
10. Пусть x_1, x_2 — различные корни уравнения $5x^2 - 7x - 3 = 0$. Найдите значение выражения

$$\frac{1}{5x_1 - 7} + \frac{1}{5x_2 - 7}.$$

11. Вершина параллелограмма и середины двух не содержащих её сторон являются вершинами правильного треугольника. Найдите углы параллелограмма.
12. Сколькими способами можно представить число 13 в виде суммы меньших натуральных слагаемых, если два представления, отличающихся порядком слагаемых, считать различными?
13. В школе прошёл забег с участием 10 спортсменов, и все заняли разные места. На следующий день каждого из них спросили, какое место он занял, и каждый назвал какое-то целое число от 1 до 10. Сумма их ответов оказалась равна 37. Какое наименьшее число врунишек могло оказаться среди них?
14. Две окружности вписаны в угол величиной 60° , причём одна проходит через центр другой. Найдите отношение радиуса большей окружности к радиусу меньшей.
15. В каждой клетке квадрата 3×3 лежит монета орлом вверх. Какое наименьшее количество монет нужно перевернуть, чтобы в результате не оказалось трёх монет, расположенных в одной вертикали, одной горизонтали или одной диагонали и лежащих одинаково (то есть все три орлом вверх или все три решкой вверх)?
16. Клавдия Семёновна сохранила в телефоне семизначный номер своего внука. Однако, позвонив ему, она обнаружила, что записала семизначный номер неправильно — пропустила какую-то одну цифру. Сколько различных номеров придётся обзвонить Клавдии Семёновне, чтобы точно дозвониться до внука?
17. *Хромой король* — это фигура, которая ходит по шахматной доске и за один ход может сдвинуться либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку вверх. Пусть хромой король стоит в клетке А1 шахматной доски. Сколькими способами он может добраться до клетки Н8, если по пути он не может заходить в клетки С6 и G4?
18. Один джентльмен предложил другому заработать денег. Второй джентльмен должен выписать в строчку цифры от 1 до 9, и за каждое двузначное число в этой цепочке, делящееся на три, ему обещали дать 1 гинею. На какую максимальную сумму дохода может рассчитывать второй джентльмен?