

Построим равнобедренный треугольник из целых чисел по следующим правилам:

- в вершине и вдоль боковых сторон стоят единицы;
- в каждой следующей строке на одно число больше, чем в предыдущей;
- каждое число, кроме уже написанных единиц, равно сумме двух чисел, стоящих в предыдущей строке чуть левее и чуть правее.

Получим такой треугольник (он называется *треугольником Паскаля*):

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & 1 \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

Обозначим через C_n^k k -е по счёту слева число в n -й строке треугольника Паскаля (нумерация строк и элементов каждой строки начинается с нуля). Так, $C_2^0 = 1$, $C_4^2 = 6$.

Теорема (бином Ньютона). Если раскрыть скобки и привести подобные в выражении $(a+b)^n$, то коэффициент при $a^k b^{n-k}$ будет равен C_n^k :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^n a^n b^0.$$

19.1. Раскройте скобки и приведите подобные в выражении $(a+b)^7$.

19.2. а) Почему $11^2 = 121$ и $11^3 = 1331$ похожи на строки треугольника Паскаля? Вычислите без калькулятора и умножения в столбик: **б)** 11^4 ; **в)** 21^4 ; **г)** 19^4 .

19.3. Найдите количество нулей на конце числа $11^{100} - 1$.

19.4. Сколько рациональных слагаемых содержится в разложении:

а) $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$; **б)** $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{100}$?

19.5. Рассмотрим числа $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$, $n \geq 0$.

а) Вычислите f_0, f_1, f_2, f_3 . **б)** Докажите, что при любом целом $n \geq 0$ число f_n — целое. **в)** Докажите, что при любом натуральном n выполнено равенство $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Таким образом, $\{f_n\}$ — последовательность чисел Фибоначчи.

19.6. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$. Подсказка: $(a+b)^n = (b+a)^n$.

19.7. Докажите, что:

а) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$; **б)** $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$;
в) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$; **г)** $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

Подсказки: $1+1=2$; $1-1=0$; $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b)$; $(a+b)^{2n} = (a+b)^n(a+b)^n$.

19.8. В разложении выражения $(x+y)^n$ с помощью бинома Ньютона второй член равен 240, третий — 720, а четвёртый — 1080. Найдите x, y, n .