

Подсчёт способов. Решения

10 октября 2026

1. У Луизы есть пять больших воздушных шариков: белый, синий, красный, жёлтый и зелёный. У Серёжи есть шесть маленьких воздушных шариков: синий, красный, жёлтый, зелёный, фиолетовый и коричневый. Сколькими способами они могут выбрать два шарика — один большой и один маленький — так, чтобы шарика были разных цветов?

Ответ. 26 способов.

Решение. Переберём варианты в зависимости от цвета большого шарика.

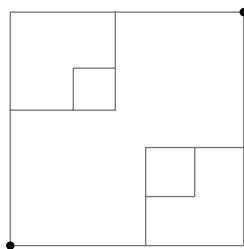
Если большой шарик белый, к нему подходит любой из шести маленьких: среди них нет белого.

Если большой шарик синий, к нему подходят все маленькие, кроме синего, то есть пять шариков. Точно так же для красного, жёлтого и зелёного большого шарика есть по пять подходящих маленьких.

Большой шарик	Подходящих маленьких
Белый	6
Синий	5
Красный	5
Жёлтый	5
Зелёный	5

Любая подходящая пара попала ровно в одну строку таблицы. Значит, всего есть $6 + 5 + 5 + 5 + 5 = 26$ способов.

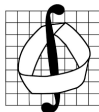
2. Робот находится в левом нижнем углу схемы и хочет попасть в правый верхний угол. Он может двигаться только по нарисованным линиям, на каждом участке выбирая направление вверх или вправо. Сколько различных маршрутов есть у робота?



Ответ. 6 маршрутов.

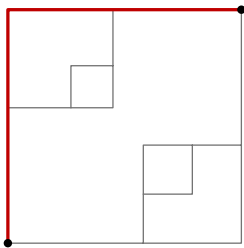
Решение. Первый участок пути направлен либо вверх, либо вправо. Рассмотрим эти случаи отдельно.

- 1) Робот сначала идёт вверх. На первой развилке он может продолжить движение по левой стороне квадрата, а затем пройти по верхней стороне до

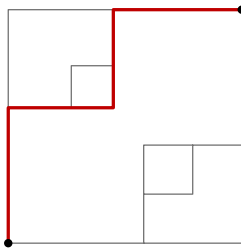


конца. Это один маршрут.

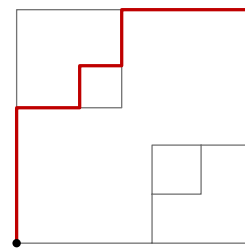
Если же на первой развилке он повернёт вправо, то дальше сможет подняться вверх в одном из двух мест. После этого оставшаяся часть пути определяется однозначно. Получаем ещё два маршрута. Все три показаны ниже.



Маршрут 1

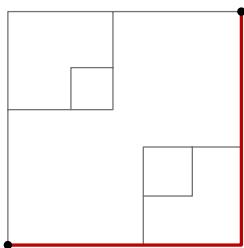


Маршрут 2

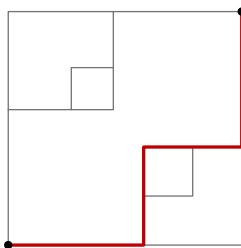


Маршрут 3

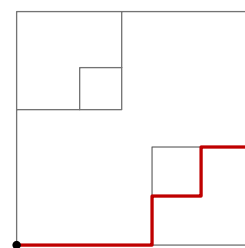
2) Робот сначала идёт вправо. Если на первой развилке он продолжит идти по нижней стороне квадрата, получится один маршрут. Если повернёт вверх, дальше будет два варианта: повернуть вправо на нижней или на верхней горизонтальной линии внутри схемы. Получаем ещё три маршрута.



Маршрут 4



Маршрут 5



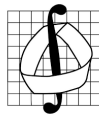
Маршрут 6

Итак, всего $3+3 = 6$ маршрутов. Других нет: мы рассмотрели оба возможных первых направления и все дальнейшие развилки.

3. На полке стоят четыре кубика, на каждом из которых написана буква. Если убрать один кубик, не меняя порядка остальных, получится слово КОТ. Сколько различных последовательностей из четырёх букв могло быть на полке, если на убранном кубике могла быть только одна из букв К, О, Т, А, М?

Ответ. 17 последовательностей.

Первое решение. Будем действовать наоборот: вставлять в слово КОТ одну из разрешённых букв. Переберём все варианты, не записывая одинаковые последовательности повторно.



Буква	Последовательности	Число
К	ККОТ, КОКТ, КОТК	3
О	ОКОТ, КООТ, КОТО	3
Т	ТКОТ, КТОТ, КОТТ	3
А	АКОТ, КАОТ, КОАТ, КОТА	4
М	МКОТ, КМОТ, КОМТ, КОТМ	4

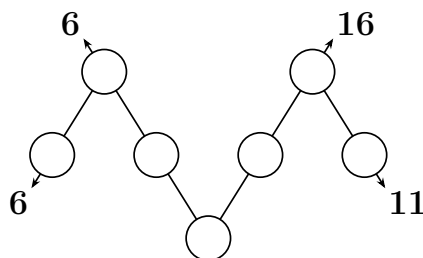
Между разными строками повторений нет: при добавлении разных букв получаются разные наборы букв. Значит, всего $3 + 3 + 3 + 4 + 4 = 17$ последовательностей.

Второе решение. Для добавления буквы есть четыре места: перед К, между К и О, между О и Т, после Т. Букву можно выбрать пятью способами. Сначала получаем $5 \cdot 4 = 20$ вариантов вставки.

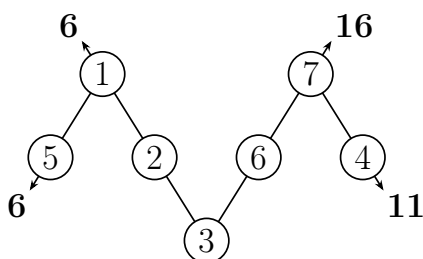
Однако три последовательности посчитаны дважды: ККОТ, КООТ и КОТТ. Например, ККОТ получается, если вставить К перед первой буквой или сразу после неё. Аналогично возникают два способа получить КООТ и два способа получить КОТТ.

Других повторений нет: они возникают только при вставке буквы непосредственно перед такой же буквой или после неё. Поэтому из 20 нужно вычесть три лишних подсчёта. Получаем $20 - 3 = 17$.

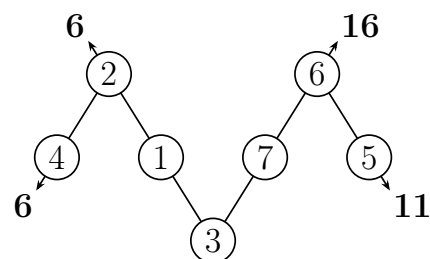
4. Расставьте числа от 1 до 7 по кружкам, используя каждое число ровно один раз. Сумма чисел на каждой из четырёх прямых должна равняться числу, указанному у её конца. Найдите все возможные расстановки.



Ответ. Две расстановки:

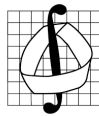


Первая расстановка.



Вторая расстановка.

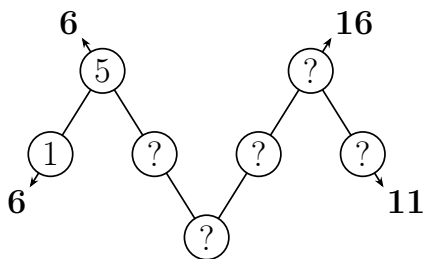
Решение. В двух крайних левых кружках стоят разные числа с суммой 6.



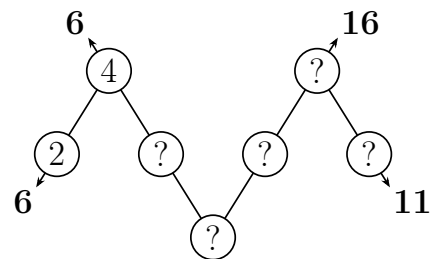
Это могут быть только 1 и 5 или 2 и 4. Пара 3 и 3 не подходит, поскольку числа не должны повторяться. У каждой пары есть два порядка, поэтому всего нужно рассмотреть четыре случая.

1) В крайнем левом кружке стоит 1, а в верхнем левом — 5. Тогда на два других кружка левой длинной прямой остаётся сумма $6 - 5 = 1$. Два положительных числа такую сумму дать не могут.

2) В крайнем левом кружке стоит 2, а в верхнем левом — 4. Тогда на два других кружка той же прямой остаётся сумма $6 - 4 = 2$. Это возможно только для 1 и 1, но повторять числа нельзя.



Не подходит: на два кружка остаётся сумма 1.

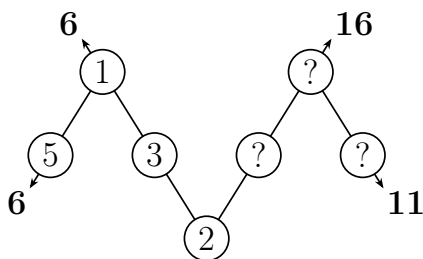


Не подходит: пришлось бы дважды использовать 1.

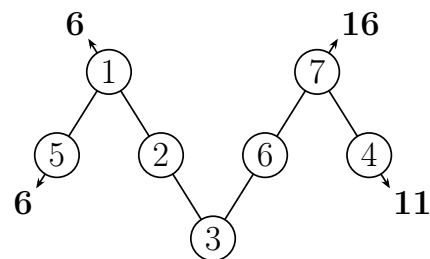
3) В крайнем левом кружке стоит 5, а в верхнем левом — 1. На два других кружка левой длинной прямой остаётся сумма 5. Число 1 уже использовано, поэтому в этих кружках должны стоять 2 и 3.

Если в нижнем кружке стоит 2, то два остальных числа правой длинной прямой должны давать $16 - 2 = 14$. Но остались только 4, 6 и 7, а даже два наибольших дают $6 + 7 = 13$. Этот вариант не подходит.

Значит, в нижнем кружке стоит 3, а в среднем левом — 2. Для правой длинной прямой нужны два числа с суммой $16 - 3 = 13$: это 6 и 7. В крайнем правом кружке остаётся 4. Чтобы сумма на короткой правой прямой была 11, в верхнем правом кружке должно стоять 7, а в среднем правом — 6.

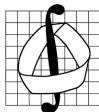


Не подходит: два оставшихся числа не могут дать 14.



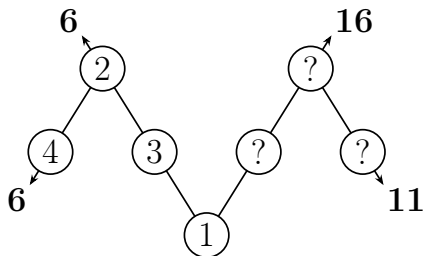
Подходит: первая расстановка.

4) В крайнем левом кружке стоит 4, а в верхнем левом — 2. На два других кружка левой длинной прямой остаётся сумма 4. Это должны быть 1 и 3.

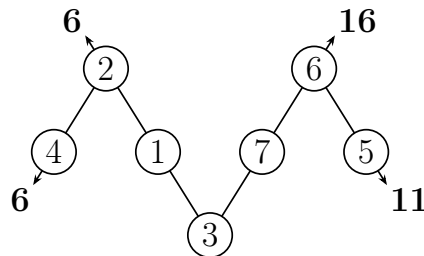


Если в нижнем кружке стоит 1, то два остальных числа правой длинной прямой должны давать $16 - 1 = 15$. Но остались 5, 6 и 7, а два наибольших дают только 13. Этот вариант не подходит.

Значит, в нижнем кружке стоит 3, а в среднем левом — 1. На правой длинной прямой нужны 6 и 7, а в крайнем правом кружке остаётся 5. Чтобы сумма на короткой правой прямой была 11, в верхнем правом кружке должно стоять 6, а в среднем правом — 7.



Не подходит: два оставшихся числа не могут дать 15.



Подходит: вторая расстановка.

В обеих найденных расстановках использованы все числа от 1 до 7 ровно по одному разу и выполнены все четыре условия на суммы. Все случаи рассмотрены, поэтому других расстановок нет.

5. Сколько существует четырёхзначных чисел, сумма цифр которых а) меньше 4; б) не меньше 4?

Ответ. а) 15; б) 8985.

Решение. а) Первая цифра четырёхзначного числа не равна нулю. Поэтому сумма его цифр положительна. Если она меньше 4, то равна 1, 2 или 3.

Сумма цифр равна 1. Возможна только одна цифра 1, остальные — нули. Чтобы число было четырёхзначным, единица должна стоять первой. Получаем одно число: 1000.

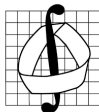
Сумма цифр равна 2. Либо есть одна цифра 2 и три нуля — тогда получаем 2000; либо есть две единицы и два нуля. Одна единица должна стоять первой, а вторую можно поставить на любое из трёх оставшихся мест. Получаем

$$2000, \quad 1100, \quad 1010, \quad 1001.$$

Всего четыре числа.

Сумма цифр равна 3. Есть три возможности для набора ненулевых цифр:

- 1) Одна тройка. Получается только число 3000.
- 2) Одна двойка и одна единица. Первой должна стоять двойка или единица, а вторую ненулевую цифру можно поставить на любое из трёх оставшихся



мест. Получаем шесть чисел:

$$\begin{array}{ccc} 2100, & 2010, & 2001, \\ 1200, & 1020, & 1002. \end{array}$$

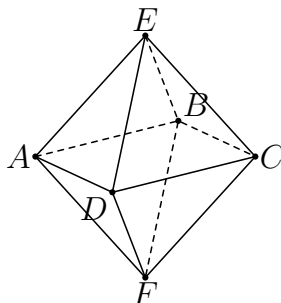
3) Три единицы. Ноль может стоять на втором, третьем или четвёртом месте. Получаем три числа:

$$1011, \quad 1101, \quad 1110.$$

Значит, с суммой цифр 3 есть $1 + 6 + 3 = 10$ чисел, а с суммой цифр меньше 4 — $1 + 4 + 10 = 15$ чисел.

б) Всего четырёхзначных чисел $9999 - 1000 + 1 = 9000$. Из них у 15 чисел сумма цифр меньше 4. У всех остальных она не меньше 4. Поэтому ответ равен $9000 - 15 = 8985$.

6. На рисунке изображён каркас октаэдра. В вершине E находится жук. Он может ползать по рёбрам только сверху вниз, а по сторонам квадрата $ABCD$ — в любом направлении. Сколькими способами жук может добраться из E в F , если ему запрещено посещать одну и ту же вершину дважды?



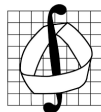
Ответ. 28 способов.

Решение. Из вершины E жук сначала спускается в одну из четырёх вершин квадрата: A , B , C или D .

Пусть он спустился в A . Дальше можно сразу спуститься в F либо пойти по квадрату через D или через B .

Если жук пошёл через D , он может спуститься в F из D , продолжить путь до C и спуститься оттуда или дойти через C до B и затем спуститься в F . Продолжать движение по квадрату после этого нельзя: следующей будет уже посещённая вершина A .

Если жук пошёл через B , аналогично получаются ещё три варианта. Выпи-



шем все семь продолжений пути из A :

Сразу вниз: $A \rightarrow F$;

Через D : $A \rightarrow D \rightarrow F$,
 $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow F$,
 $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow F$;

Через B : $A \rightarrow B \rightarrow F$,
 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F$,
 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F$.

Возвращаться назад нельзя, поскольку тогда жук повторно посетит предыдущую вершину. Значит, других продолжений нет.

Если сначала спуститься в B , C или D , получится столько же вариантов: все четыре вершины квадрата устроены одинаково. Поэтому всего есть $4 \cdot 7 = 28$ путей.

7. Прямоугольник шириной 24 и высотой 20 нужно разрезать на прямоугольники размером 4×5 . Маленькие прямоугольники можно поворачивать, но их стороны должны быть параллельны сторонам большого прямоугольника. Сколькими способами можно это сделать? Способы разрезания, которые являются зеркальным отражением друг друга, считаются различными.

Ответ. 6 способов.

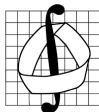
Решение. Рассмотрим прямоугольники, прилегающие к левой стороне большого прямоугольника. Они делят эту сторону длины 20 на отрезки длины 4 или 5.

Если среди этих отрезков есть один, два или три отрезка длины 5, на остальные остаётся соответственно 15, 10 или 5. Ни одно из этих чисел не делится на 4. Поэтому смешать отрезки двух длин нельзя: вдоль левой стороны лежат либо четыре отрезка длины 5, либо пять отрезков длины 4.

В первом случае все прилегающие к левой стороне прямоугольники имеют высоту 5 и ширину 4. Они полностью заполняют вертикальную полосу ширины 4. Во втором случае они имеют высоту 4 и ширину 5 и заполняют полосу ширины 5.

Уберём эту полосу. Останется прямоугольник той же высоты 20, к которому можно применить такое же рассуждение. Повторяя его, получаем, что **любое разрезание состоит из вертикальных полос ширины 4 или 5**. Каждая такая полоса разрезается на маленькие прямоугольники единственным способом.

Остаётся узнать, как набрать общую ширину 24 из четвёрок и пятёрок. Полос



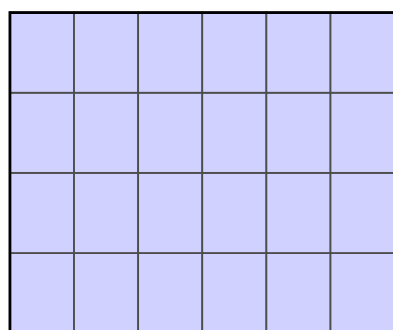
ширины 5 может быть от нуля до четырёх. Переберём их количество:

Полос ширины 5	Осталось	Делится на 4?
0	24	Да
1	19	Нет
2	14	Нет
3	9	Нет
4	4	Да

Получаются только два случая.

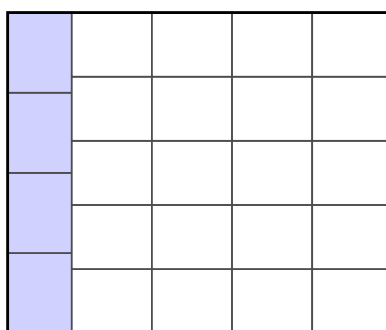
- 1) Шесть полос ширины 4. Это один способ разрезания.
- 2) Четыре полосы ширины 5 и одна полоса ширины 4. Полосу ширины 4 можно поставить на первое, второе, третье, четвёртое или пятое место слева. Это пять способов.

Все шесть разрезаний показаны ниже. Под каждым рисунком указаны ширины полос; полосы ширины 4 выделены голубым.



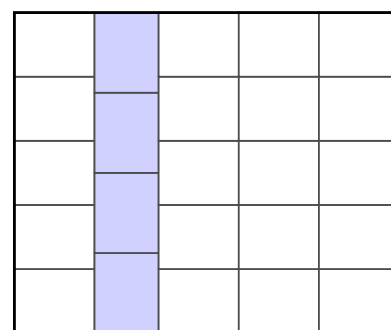
4 4 4 4 4 4

Способ 1



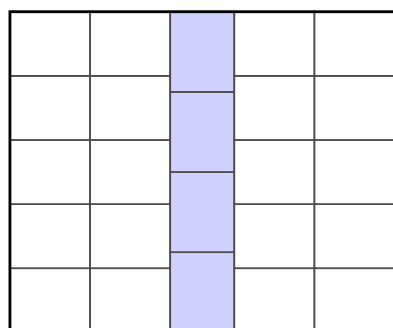
4 5 5 5 5

Способ 2



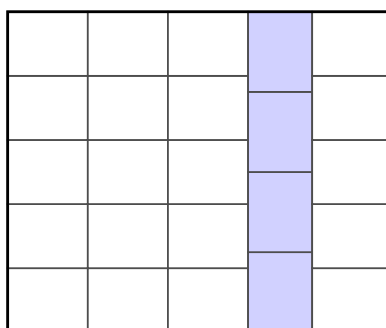
5 4 5 5 5

Способ 3



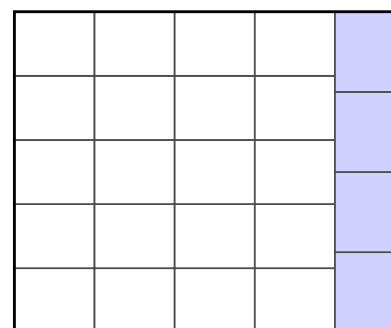
5 5 4 5 5

Способ 4



5 5 5 4 5

Способ 5



5 5 5 5 4

Способ 6

По условию зеркальные разрезания считаются различными, поэтому ни один из пяти вариантов второго случая исключать не нужно. Итак, всего $1 + 5 = 6$ способов.