

Разнобой. Решения

1.1. В декабре некоторого года было поровну понедельников и пятниц. Каким днём недели было 31 декабря этого года?

Решение: В декабре 31 день, поэтому три первых дня недели месяца встречаются по 5 раз, а остальные — по 4 раза. Чтобы понедельников и пятниц было поровну, ни понедельник, ни пятница не должны входить в первые три дня недели месяца. Это возможно только в случае, когда 1 декабря — вторник. Тогда 31 декабря — четверг.

1.2. Дата называется палиндромом, если она читается с конца так же, как и с начала (например, 13.05.5031). Когда будет ближайшая дата-палиндром?

Решение: До 2030 года дат палиндромов нет, а в 2030: 03.02.2030.

1.3. Предложил чётр лодырю: «Всякий раз, как перейдёшь этот волшебный мост, твои деньги удвоятся. За это ты, перейдя мост, должен будешь отдать мне 40 рублей». Трижды перешёл лодырь мост — и остался совсем без денег. Сколько денег было у лодыря первоначально?

Решение: Будем рассуждать с конца. Перед третьим переходом у лодыря было 20 рублей, так как после удвоения получилось 40 рублей, которые он отдал чётру. Перед вторым переходом у него было 30 рублей, так как $2 \cdot 30 - 40 = 20$. Перед первым переходом у него было 35 рублей, так как $2 \cdot 35 - 40 = 30$.

1.4. За круглым столом сидят 12 гномов, причём как минимум семеро из них — математики.

а) Докажите, что какие-то два математика сидят друг напротив друга.

б) Докажите, что найдётся гном, у которого оба соседа — математики.

Решение: а) Разобьём гномов на 6 пар сидящих друг напротив друга. Если бы в каждой паре было не более одного математика, то всего математиков было бы не более 6. Но их как минимум 7, поэтому в некоторой паре оба гнома — математики.

б) Каждый математик является соседом для двух гномов, поэтому как минимум 7 математиков создают не менее 14 соседств с математиком. Эти соседства распределены между 12 гномами. По принципу Дирихле найдётся гном, на которого приходится хотя бы два таких соседства. Поскольку у каждого гнома ровно два соседа, оба его соседа — математики.

1.5. На кружке каждая девочка знакома с 6 мальчиками, а каждый мальчик — с 7 девочками. Какое наименьшее количество школьников может быть на кружке?

Решение: Пусть на кружке g девочек и b мальчиков. Посчитаем знакомства между мальчиками и девочками двумя способами: $6g = 7b$. Поэтому $g = 7k$, $b = 6k$. Наименьшее возможное значение — $k = 1$. При $g = 7$ и $b = 6$ каждый мальчик может быть знаком со всеми девочками, а каждая девочка — со всеми мальчиками. Значит, такое распределение возможно.

1.6. Четыре друга пришли с рыбалки. Каждые двое сосчитали сумму своих уловов. Получилось шесть чисел: 7, 9, 14, 14, 19, 21.

а) Сколько всего рыб было поймано?

б) Сможете ли вы узнать, каковы были уловы?

Решение: В сумме всех шести чисел улов каждого рыбака посчитан три раза. Поэтому общее число рыб равно $\frac{7+9+14+14+19+21}{3} = 28$.

Пусть уловы в порядке возрастания равны $a \leq b \leq c \leq d$. Тогда $a + b = 7$, $c + d = 21$. Из оставшихся сумм можно получить, что $a + c = 9$, $b + c = 14$ и $b + d = 19$. Отсюда $2c = (a + c) + (b + c) - (a + b) = 9 + 14 - 7 = 16$, поэтому $c = 8$, $a = 1$, $b = 6$, а $d = 13$. Полученные попарные суммы действительно равны данным шести числам.

1.7. «Кубиковый календарь» состоит из двух кубиков, на каждой из граней которых написано по одной цифре. При этом, поставив рядом два кубика, можно составить любой день месяца. Какие цифры написаны на гранях?

Решение: На обоих кубиках должны быть цифры 0, 1 и 2. На оставшихся шести гранях должны находиться цифры 3, 4, 5, 6, 7, 8, причём цифру 6 можно переворачивать и использовать как 9. Эти шесть цифр можно разбить между кубиками по три любым образом. Например, на одном кубике могут быть цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, а на другом — 0, 1, 2, 6, 7, 8.

1.8. Найдите четырёхзначное число, две средние цифры которого образуют число, в 5 раз большее числа тысяч и в 3 раза большее числа единиц.

Решение: Пусть цифра тысяч равна a , цифра единиц — d , а число, образованное двумя средними цифрами, равно x . Тогда $x = 5a = 3d$. Значит, $5a$ делится на 3, поэтому a делится на 3. При $a = 3$ получаем $x = 15$ и $d = 5$. При $a = 6$ или $a = 9$ значение d уже не является цифрой. Поэтому искомое число равно 3155.

1.9. Учительница написала на доске три числа, отличные от нуля, и велела Диме одно из них уменьшить на треть, другое увеличить на четверть, а третье уменьшить на одну пятую и результаты записать в тетради. Оказалось, что в тетради Дима записал те же числа, что и на доске, но в другом порядке. Докажите, что Дима ошибся.

Решение: Пусть произведение трёх чисел на доске равно P . После действий Димы первое число умножилось на $\frac{2}{3}$, второе — на $\frac{5}{4}$, а третье — на $\frac{4}{5}$. Поэтому произведение чисел в тетради равно

$$P \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3}P.$$

Но в тетради записаны те же три числа, только в другом порядке, значит, их произведение должно остаться равным P . Получаем $P = \frac{2}{3}P$, откуда $P = 0$. Это невозможно, так как все три исходных числа отличны от нуля. Следовательно, Дима ошибся.