

Подсчёт двумя способами. Решения

2.0. Можно ли в прямоугольной таблице 5×10 так расставить числа, чтобы сумма чисел каждой строки равнялась 30, а сумма чисел каждого столбца равнялась 10?

Решение: Посчитаем сумму всех чисел таблицы двумя способами. По строкам она равна $5 \cdot 30 = 150$, а по столбцам — $10 \cdot 10 = 100$. Получилось противоречие, значит, так расставить числа нельзя.

2.1. В конференции принимали участие 19 учёных. После конференции каждый учёный отправил 2 или 4 письма другим участникам. Могло ли случиться так, что каждый человек получил ровно 3 письма?

Решение: Если каждый получил ровно 3 письма, то всего было отправлено $19 \cdot 3 = 57$ писем. Но каждый учёный отправил либо 2, либо 4 письма, поэтому общее число отправленных писем должно быть чётным. Противоречие.

2.2. В строку записаны 10 чисел, причём сумма любых трёх подряд равна 7, а сумма всех равна 20. Найдите седьмое число.

Решение: Сумма первых девяти чисел равна $3 \cdot 7 = 21$. Значит, десятое число равно $20 - 21 = -1$. Поскольку суммы любых трёх подряд равны, первое и четвёртое, четвёртое и седьмое, седьмое и десятое числа равны. Поэтому седьмое число тоже равно -1 .

2.3. Четыре девочки — Таня, Света, Соня и Варвара — участвовали в концерте. Они пели песни. Каждую песню исполняли три девочки. Таня спела 8 песен — больше, чем каждая из остальных, а Света — 5 песен — меньше, чем каждая из остальных девочек. Сколько песен было спето?

Решение: Соня и Варвара спели больше 5, но меньше 8 песен, значит, каждая из них спела либо 6, либо 7 песен. Общее число исполнений равно утроенному числу песен, поэтому сумма $8 + 5 + S + V$ должна делиться на 3. Из возможных значений 25, 26 и 27 на 3 делится только 27. Значит, Соня и Варвара спели по 7 песен, а всего было спето $27 : 3 = 9$ песен.

2.4. Можно ли в клетки квадрата 10×10 поставить некоторое количество звёздочек так, чтобы в каждом квадрате 2×2 было ровно две звёздочки, а в каждом прямоугольнике 3×1 — ровно одна звёздочка? В каждой клетке может стоять не более одной звёздочки.

Решение: Разобьём доску на 25 квадратов 2×2 . В каждом из них по две звёздочки, значит, всего звёздочек должно быть $25 \cdot 2 = 50$. С другой стороны, доску можно разбить на 33 прямоугольника 3×1 и одну клетку. В каждом таком прямоугольнике ровно одна звёздочка, а в оставшейся клетке — не более одной. Поэтому всего звёздочек не больше $33 + 1 = 34$. Противоречие.

2.5. Имеется несколько одинаковых квадратов, в вершинах каждого из которых написаны натуральные числа от 1 до 4. Квадраты сложили в стопку вершина к вершине. Может ли при этом оказаться, что суммы чисел при каждой из четырёх вершин стопки одинаковы и равны 2026?

Решение: На каждом квадрате сумма чисел в вершинах равна $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Значит, сумма всех чисел во всей стопке должна делиться на 10. С другой стороны, если у каждой из четырёх вершин сумма равна 2026, то сумма всех чисел равна $4 \cdot 2026 = 8104$, что на 10 не делится. Противоречие.

2.6. У Маши есть монеты по 2 и 5 рублей. Если она возьмёт все свои двухрублёвые монеты, ей не хватит 60 рублей, чтобы купить 4 пирожка. Если возьмёт все пятирублёвые — не хватит 60 рублей на 5 пирожков. А всего ей не хватает 60 рублей для покупки 6 пирожков. Сколько стоит пирожок?

Решение: Если сложить стоимость всех 2-рублёвых и всех 5-рублёвых монет, то получатся все деньги Маши. По первым двум условиям на все деньги Маши не хватает 120 рублей на 9 пирожков. По третьему условию на все деньги Маши не хватает 60 рублей на 6 пирожков. Значит, 3 пирожка стоят $120 - 60 = 60$ рублей, поэтому один пирожок стоит 20 рублей.

2.7. Футбольный мяч шит из 32 лоскутков: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько лоскутков белого цвета?

Решение: Пусть белых лоскутков b , а чёрных — c . Посчитаем границы между белыми и чёрными лоскутками двумя способами. Каждый чёрный пятиугольник имеет 5 белых соседей, поэтому таких границ $5c$. Каждый белый шестиугольник имеет 3 чёрных соседа, поэтому таких границ $3b$. Значит, $5c = 3b$. Кроме того, $b + c = 32$. Отсюда $b = 20$, $c = 12$.

2.8. В стране Карабасии живут карабасы и барабасы. Каждый карабас дружит с 6 карабасами и 9 барабасами. Каждый барабас дружит с 10 карабасами и 7 барабасами. Какое наименьшее число

жителей может быть в Карабасии?

Решение: Пусть карабасов k , а барабасов b . Посчитаем дружба между карабасами и барабасами двумя способами. Со стороны карабасов их $9k$, а со стороны барабасов — $10b$. Поэтому $9k = 10b$, откуда $k = 10t$, $b = 9t$. Кроме того, каждый барабас дружит с 7 барабасами, значит, число барабасов должно быть чётным. Поэтому t чётно, и наименьшее возможное значение равно $t = 2$. Тогда $k = 20$, $b = 18$, всего 38 жителей.

2.9. На острове с населением 96 человек правительство решило провести пять реформ. Каждой реформой недовольна ровно половина всех граждан. Гражданин выходит на митинг, если он недоволен более чем половиной всех реформ. Какое максимальное число людей правительство может ожидать на митинге?

Решение: Посчитаем общее число недовольств реформами. Каждой из пяти реформ недовольны 48 человек, значит, всего имеется $5 \cdot 48 = 240$ недовольств. Каждый вышедший на митинг недоволен хотя бы тремя реформами, поэтому митингующих не может быть больше $240 : 3 = 80$.

Покажем, что 80 человек возможны. Разобьём их на 10 групп по 8 человек. Пусть первой реформой недовольны группы с 1-й по 6-ю, второй — с 3-й по 8-ю, третьей — с 5-й по 10-ю, четвёртой — группы 7, 8, 9, 10, 1, 2, а пятой — группы 9, 10, 1, 2, 3, 4. Тогда каждой реформой недовольны ровно 6 групп, то есть 48 человек, а каждый из этих 80 граждан недоволен ровно тремя реформами. Остальные 16 граждан могут быть довольны всеми реформами.