Важная лемма

Теорема о средней линии известна школьникам, начиная с 8-го класса, а вот утверждение, о котором речь пойдёт ниже, зачастую ускользает от них.

Важная лемма. *Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC, H – его ортоцентр, P – середина стороны AC (рис. 1). Тогда*

$$BH = 2 \cdot OP.$$

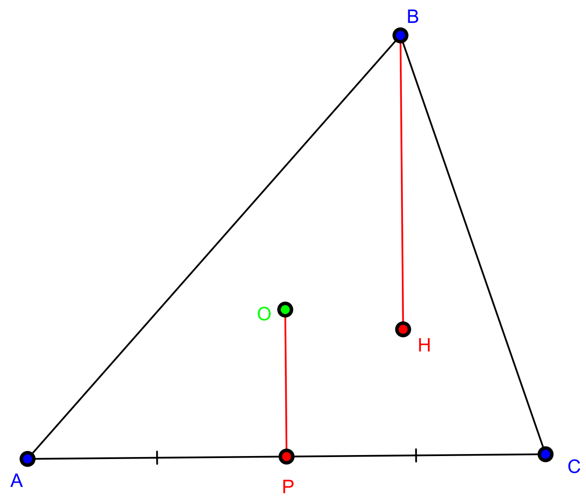

рис. 1

Доказательство. Первый способ.

Дополним рис.1, а именно отметим точки K, L, M – середины отрезков AB, BH, CH соответственно (рис. 2).

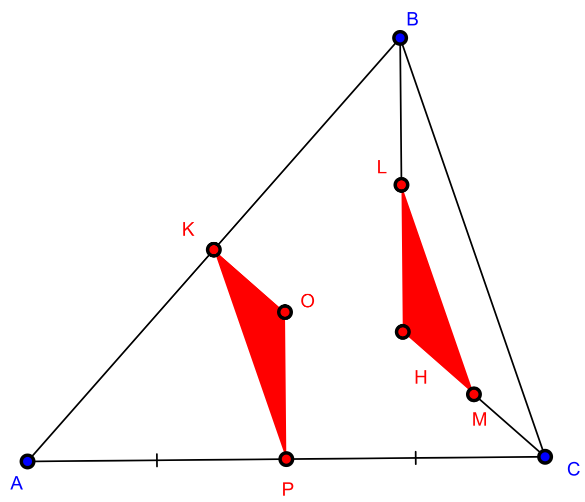

рис. 2

Заметим, что $OK \perp AB$, так как O – точка пересечения серединных перпендикуляров (центр описанной окружности), но и $CH \perp AB$, поэтому $CH || OK$. Аналогично убеждаемся, что $OP || BH$. Далее, KP – средняя линия треугольника ABC, поэтому $KP || BC$ и $KP = \frac{1}{2}BC$. А LM – средняя линия треугольника BHC, следовательно, $LM || BC$ и $LM = \frac{1}{2}BC$. Получаем, что у треугольников KOP и MHL стороны попарно параллельны, следовательно, их углы попарно равны(почему?). Но $KP = \frac{1}{2}BC = LM$, т. е. $\triangle KOP = \triangle LMH$. Поэтому $OP = LH = \frac{1}{2}BH$. $\square$

Доказательство. Второй способ.

Пусть прямая CO пересекает описанную окружность в точке Q(рис. 3).

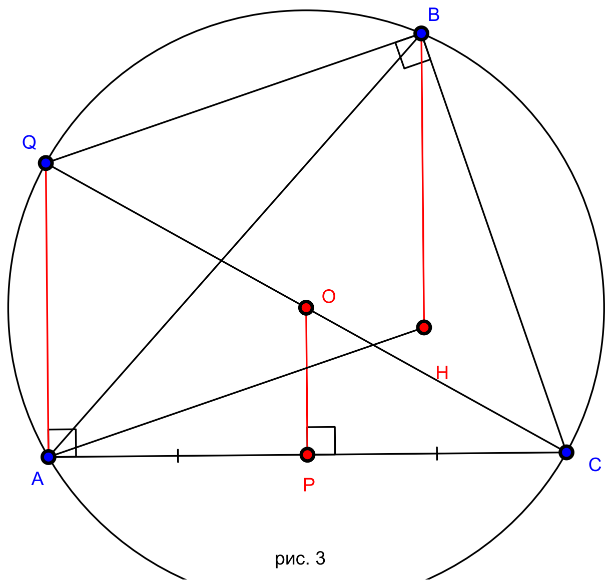

рис. 3

Заметим, что $\angle QAP = 90^\circ$, т.к. QC – диаметр. Но b $OP \perp AC$, поэтому $QA||OP$. Получаем, что в треугольнике CQA OP является средней линией, следовательно, $OP = \frac{1}{2}AQ$. Отметим, что $\angle QBC = 90^\circ$(почему?) и $AH \perp BC$, поэтому $QB||AH$. С другой стороны, $BH \perp AC$ и $AQ \perp AC$, т.е. $AQ||BH$. Откуда заключаем, что $AQBH$ – параллелограмм, т.е. $AQ = BH$. Итак, получаем такую цепочку равенств $OP = \frac{1}{2}AQ = \frac{1}{2}BH$, чем и завершается доказательство. $\square$

Оказывается, что данная конструкция буквально усапана параллелограммами и средними линиями. В обозначениях рис. 2 докажите такие утверждения.

***Упражнение* 1.** Докажите, что отрезок PL равен радиусу описанной окружности треугольника ABC.

***Упражнение* 2.** Точка симметричная точке O относительно середины медианы BP лежит на высоте треугольника ABC.

***Упражнение* 3.** Пусть биссектриса угла B пересекает отрезок PL в точке N. Тогда

а) $NL = BL$;

б) $\angle HNB = 90^\circ$.

***Упражнение* 4.** Прямая PL перпендикулярна касательной, проведённой к описанной окружности треугольника ABC в точке B.

Более того, важная лемма позволяет довольно просто доказать такую известную теорему.

***Теорема* 1.** *Ортоцентр H, центр описанной окружности O и точка пересечения медиан G лежат на одной прямой (**прямой Эйлера**).*

Доказательство. Пусть прямая OH пересекает отрезок BP в точке M(рис.4).

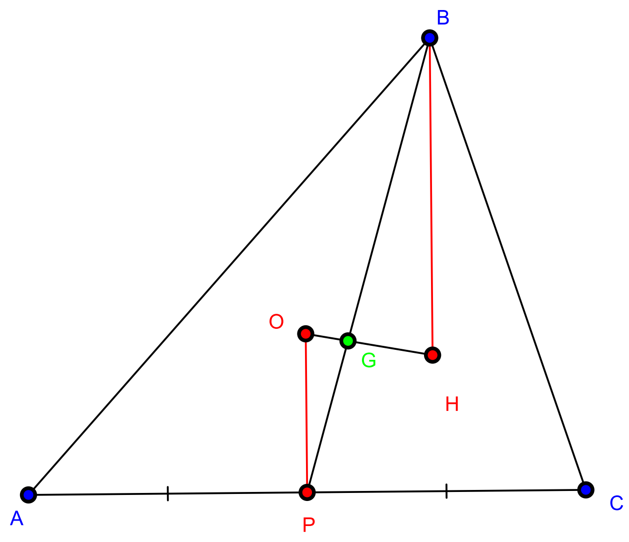

рис. 4

Заметим, что треугольники OPG и HBG подобны по двум углам. Следовательно, $\frac{BG}{GP} = \frac{BH}{OP}$. Но по важной лемме, получаем, что $\frac{BH}{OP} = 2 \Rightarrow \frac{BG}{GP} = 2$. Таким образом, получаем, что точка G лежит на медиане BP и делит её в отношении 2:1, считая от вершины, поэтому точка G является точкой пересечения медиан треугольника ABC, т.е. $G \equiv M$. $\square$

Прямая Эйлера тесно связана с другой жемчужиной элементарной геометрии.

Теорема 2. *Середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром, лежат на одной окружности.*

Эту окружность называют ***окружностью девяти точек*** либо ***окружностью Эйлера***.

На первый взгляд, кажется, что такое утверждение должно доказываться очень трудно, но оказывается, что это не совсем так. Пусть A_0, A_1, A_2 – середины отрезков AH, BC и основания высоты из вершины A. Аналогично определим точки B_0, B_1, B_2 и C_0, C_1, C_2 (рис. 5).

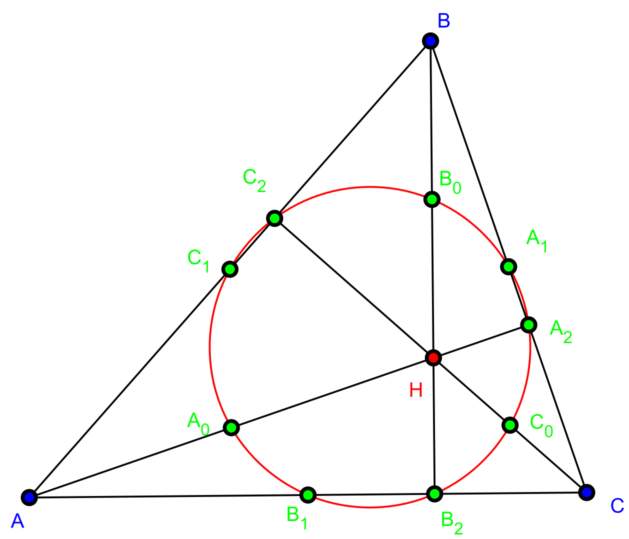

рис. 5

Покажем, что все указанные девять точек лежат на окружности с диаметром B_0B_1. Заметим, что $\angle B_0B_2B_1 = 90°$, поэтому точка B_2 лежит на этой окружности.

В треугольнике AHC отрезок A_0B_1 является средней линией, поэтому $A_0B_1||CH$(рис. 6).

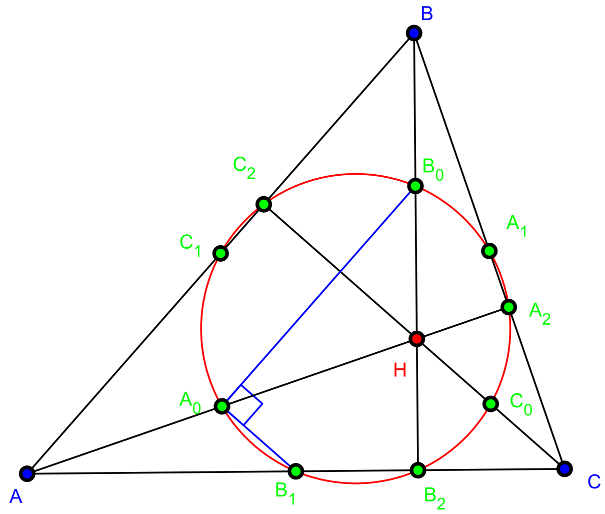

рис. 6

В треугольнике AHB A_0B_0 средняя линия, поэтому $A_0B_0||AB$. С другой стороны, $CH \perp AB$, следовательно, и параллельные им прямые будут взаимно перпендикулярны, т.е. $\angle B_1A_0B_0 = 90° \Rightarrow$ точка A_0 также лежит на окружности с диаметром B_0B_1.

Похожим образом доказывается, что $\angle B_1C_1B_0 = 90°$(рис. 7).

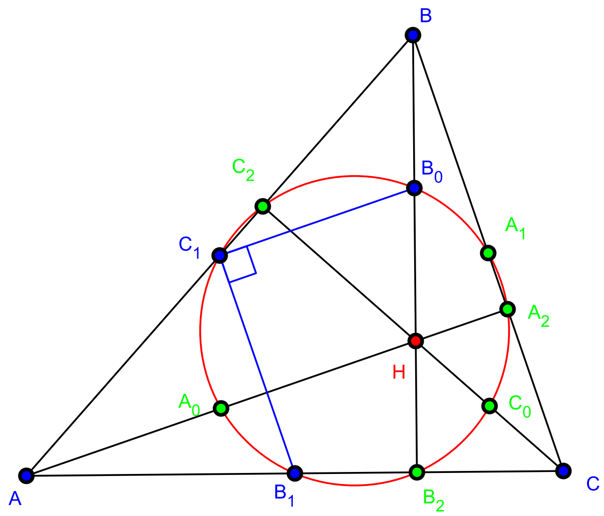

рис. 7

Действительно, C_1B_1 – средняя линия для треугольника ABC, поэтому $C_1B_1||CB$, а C_1B_0 – средняя линия для треугольника AHB, откуда заключаем, что $C_1B_0||AH$. Но $AH \perp BC$, следовательно, и $C_1B_1 \perp C_1B_0$, т.е. $\angle B_1C_1B_0 = 90° \Rightarrow$ точка C_1 лежит на окружности с диаметром B_0B_1.

Теперь докажем, что и $\angle B_1C_2B_0 = 90°$(рис. 8).

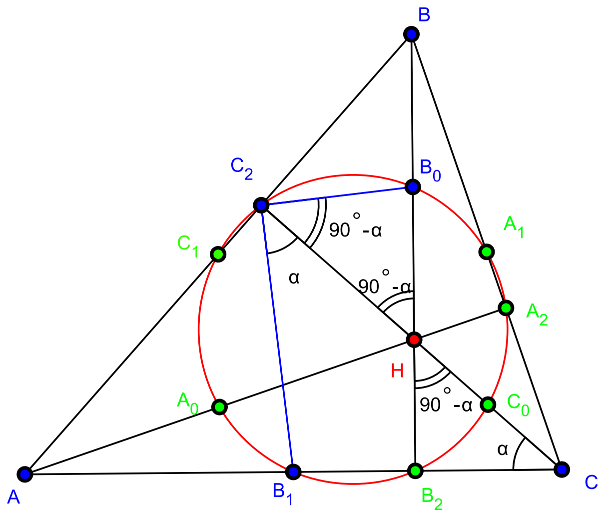

рис. 8

Заметим, что C_2B_1 медиана прямоугольного треугольника AC_2C, проведённая к гипотенузе, поэтому $\angle B_1C_2C = \angle C_2CB_1$. Обозначим эти углы через α. Тогда из прямоугольного треугольника CB_2H найдем, что $\angle B_2HC = 90^\circ - \alpha$, но $\angle C_2HB_0 = \angle B_2HC$ как вертикальные, т.е. $\angle C_2HB_0 = 90^\circ - \alpha$. С другой стороны, C_2B_0 – медиана прямоугольного треугольника HC_2B, проведённая к гипотенузе BH, поэтому $\angle B_0C_2H = \angle C_2HB_0 = 90^\circ - \alpha$. Следовательно, $\angle B_1C_2B_0 = 90^\circ$.

Для оставшихся трёх точек C_0, A_1, A_2 можно провести аналогичные рассуждения.

Таким образом, мы показали, что все девять точек лежат на окружности с диаметром B_1B_0, т. е. *центром окружности девяти точек является середина отрезка B_0B_1.*

Пусть прямая OH пересекает отрезок B_1B_0 в точке O_9(рис. 9).

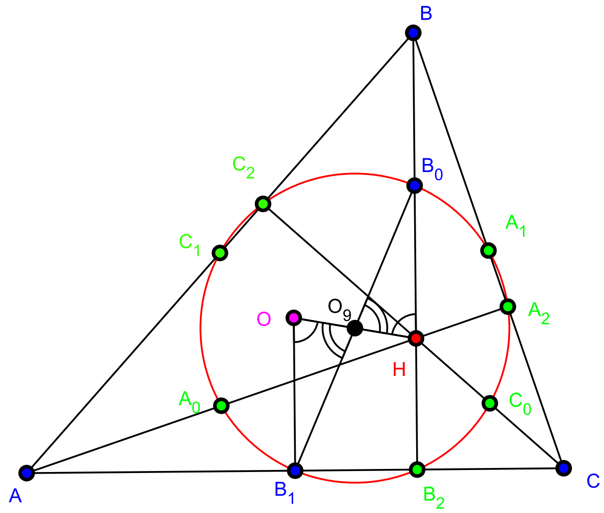

рис. 9

Заметим, что согласно важной лемме $OB_1 = HB_0$. С другой стороны, $\angle OO_9B_1 = \angle B_0O_9H$(вертикальные) и $\angle O_9OB_1 = \angle O_9HB_0$(накрест лежашие углы). Следовательно, $\triangle OO_9B_1 = \triangle HO_9B_0 \Rightarrow B_0O_9 = B_1O_9$. Другими словами, мы доказали, что ***центр окружности девяти точке лежит на прямой Эйлера и является серединой отрезка, соединяющего ортоцентр и центр описанной окружности!***

Теперь посмотрим на другие любопытные следствия из важной леммы.

Задача 1. *Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. H_c – ортоцентр треугольника ABD, H_b – ортоцентр треугольника ACD. Докажите, что $BC = H_bH_c$(рис. 10).*

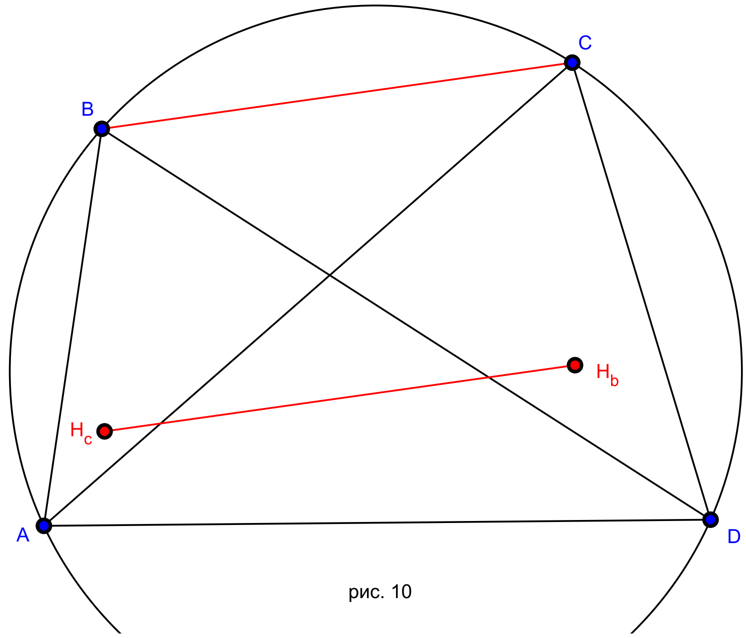

рис. 10

На первый взгляд, кажется, что задача не имеет отношения к важной лемме, но стоить отметить центр окружности(точка O) и середину стороны AD(точка P) , как сразу же всё становится почти очевидным(рис.11).

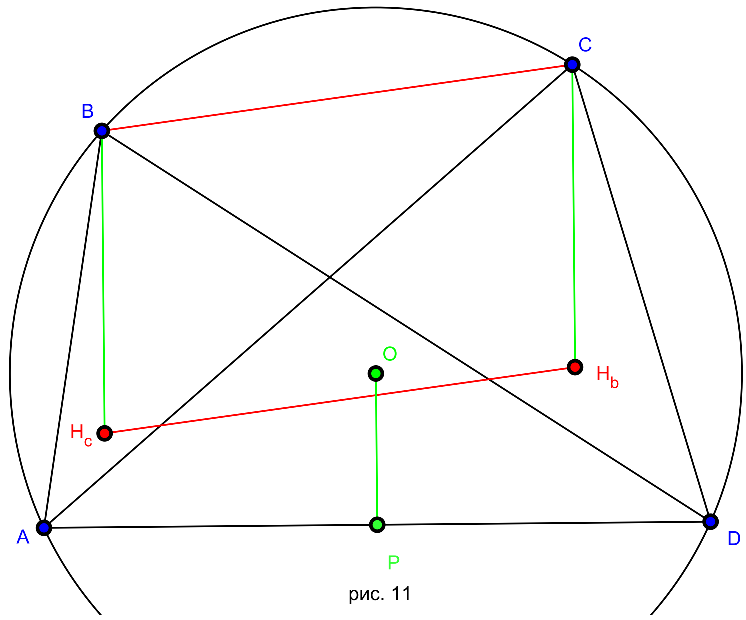

рис. 11

В самом деле, по важной лемме для треугольника ABD заключаем, что $BH_c = 2{\cdot}OP$. А из треугольника ACD опять же по важной лемме найдём, что $CH_b = 2{\cdot}OP$. Следовательно, $BH_c = CH_b$, но ведь $BH_c \perp AD$ и $CH_b \perp AD$, т.е. четырёхугольник BCH_bH_c – параллелограмма, откуда и следует нужное нам утверждение. $\square$

Теперь определим ещё и точки H_a, H_d. Тогда оказывается, что ***прямые*** AH_a***,*** BH_b***,*** CH_c***,*** DH_d ***пересекаются в одной точке (рис. 12)!***

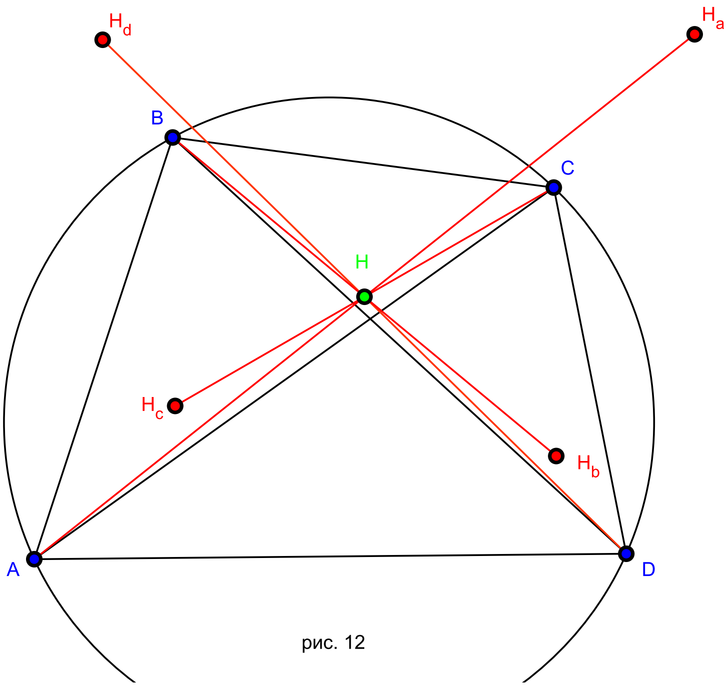

рис. 12

Эта теорема доказывается на удивление просто. В решении задачи 1 мы доказали, что BCH_bH_c – параллелограмм, поэтому отрезки BH_b и CH_c точкой пересечения делятся пополам. Такими же рассуждениями убеждаемся, что любая пара из наших отрезков делится точкой пересечения пополам, поэтому все четыре отрезка имеют общую середину. □

Точку H пересечения прямых будем называть *ортоцентром четырёхугольника*. Таким образом ортоцентр четырёхугольника $ABCD$ является серединой каждого из отрезков AH_a, BH_b, CH_c и DH_d.

Пусть L – середина стороны BC вписанного четырёхугольника $ABCD$(рис. 13).

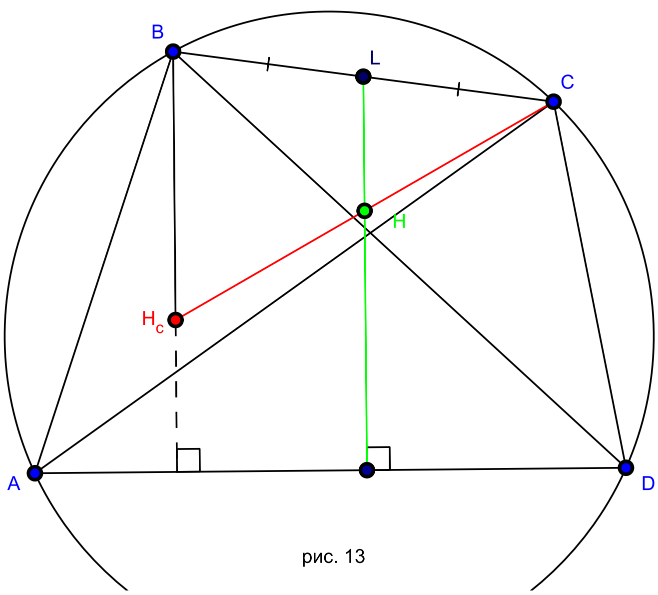

рис. 13

Проведём прямую LH (H – ортоцентр четырёхугольника). Как мы выяснили выше, H – середина отрезка CH_c, т.е. LH – средняя линия для треугольника BCH_c $\Rightarrow LH||BH_c$, но $BH_c \perp AD$, поэтому $LH \perp AD$. Другими словами, перпендикуляр, опущенный из середины L стороны BC на противоположную сторону AD, проходит через ортоцентр H этого четырёхугольника. Разумеется, аналогичное утверждение верно и для середин других сторон. Получаем, что все такие прямые пересекаются в одной точке – ортоцентре четырёхугольника(рис. 14)!

Это утверждение называют ***теоремой Монжа***.

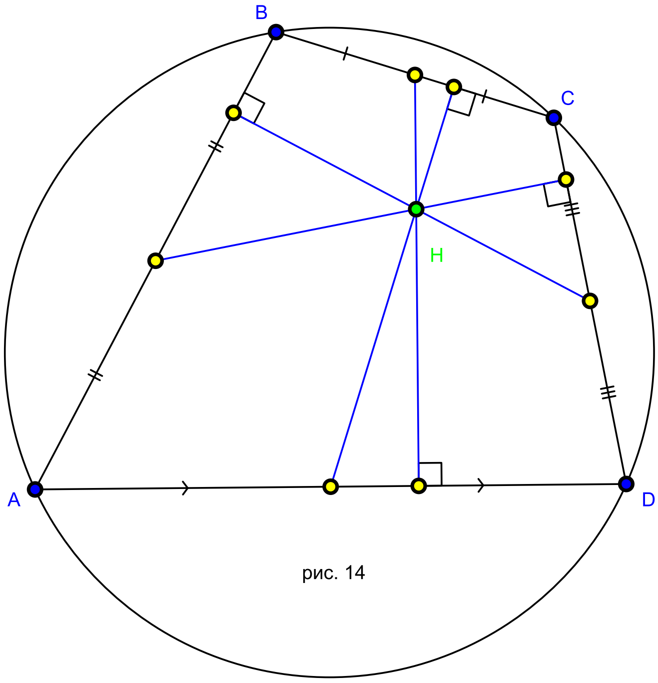

рис. 14

Медиану четырёхугольника определим как отрезок, соединяющий середины противоположных сторон. В треугольнике три медианы пересекаются в одной точке, а для четырёхугольника имеется такой аналог.

***Задача* 2.** *Пусть K, L, M, N, E, F середины отрезков AB, BC, CD, AD, AC и BD соответственно. Тогда отрезки KM, LN, EF пересекаются в одной точке(рис. 15).*

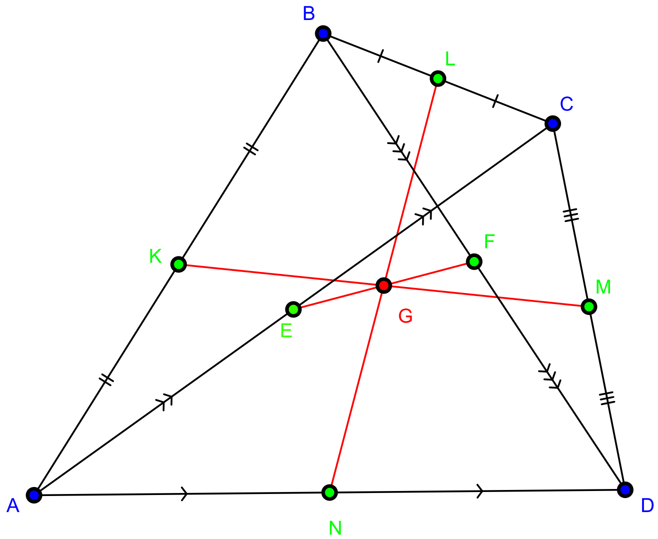

рис. 15

Доказательство опять-таки использует среднюю линию треугольника. Заметим, что KE – средняя линия для треугольника ABC, поэтому $KE = \frac{1}{2}BC$ и $KE||BC$. Аналогично из треугольника BCD найдём, что $FM = \frac{1}{2}BC$ и $FM||BC$. Таким образом, получаем, что четырёхугольник $KFME$ параллелограмм. Следовательно, отрезки KM и EF имеют общую середину. Аналогично можно показать, что середины отрезков EF и LN совпадают. Итак, мы показали, что три отрезка KM, LN, EF имеют общую середину G, т.е. они пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. □Точку G будем называть ***центроидом*** четырёхугольника.

Теперь всё готово для доказательства следующей замечательной теоремы.

***Теорема* 3 (прямая Эйлера вписанного четырёхугольника).** *Центроид G, центр описанной окружности O и ортоцентр H вписанного четырёхугольника лежат на одной прямой (рис. 16).*

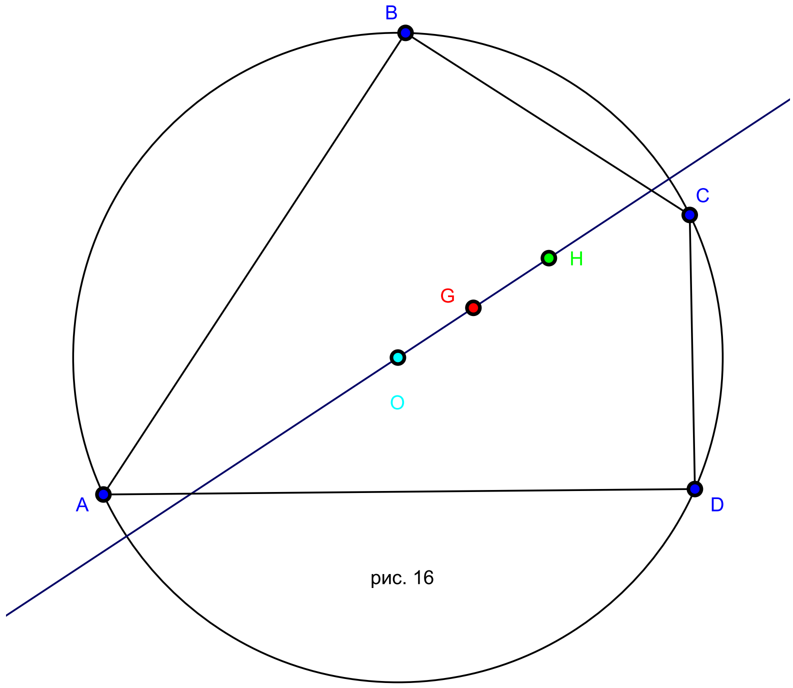

рис. 16

Доказательство очень сходно с доказательством теоремы Монжа. В самом деле, пусть N, L – середины сторон AD, BC соответственно, а H_c – ортоцентр треугольника ABD(рис. 17).

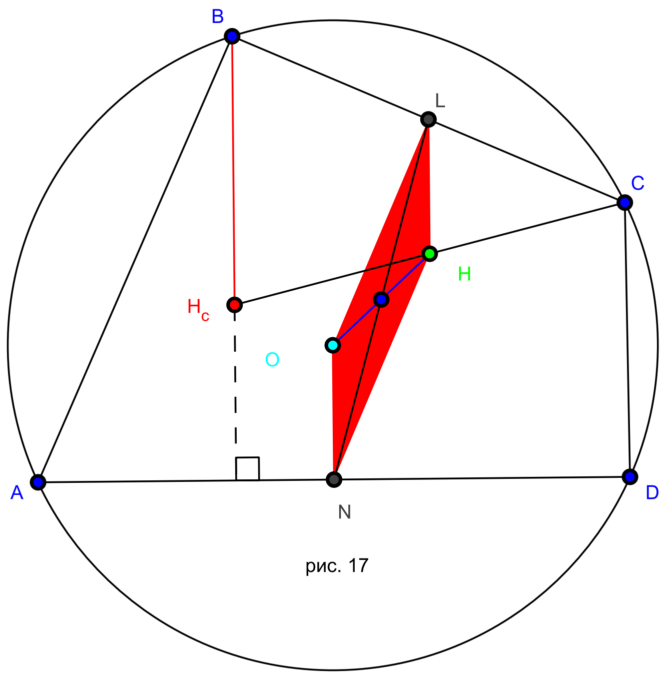

рис. 17

Как мы выяснили при доказательсвтве теоремы Монжа, $LH = \frac{1}{2}BH_c$ и $LH||BH_c$. С другой стороны, по важной лемме для треугольника ABD получаем, что $BH_c = \frac{1}{2}ON$, но ведь $ON||BH_c$. Следовательно, четырёхугольник $OLHN$ – параллелограмм, поэтому прямая OH содержит середину NL. Но чуть выше мы выяснили, что центроид G четырёхугольника является серединой отрезка LN(рис. 16)! Откуда и следует, что точки O, G, H лежат на одной прямой. Более того, мы показали, что точка G – середина отрезка OH. □

Мы обобщили прямую Эйлера, а можно ли как-то обобщить окружность девяти точек?

Оказывается, что для вписанного четырёхугольника $ABCD$ верен такой факт.

***Теорема* 4 (Окружность Эйлера вписанного четырёхугольника).** *Центры O_d, O_a, O_b, O_c окружностей девяти точек треугольников ABC, BCD, CDA, DAB соответственно лежат на одной окружности(рис. 18).*

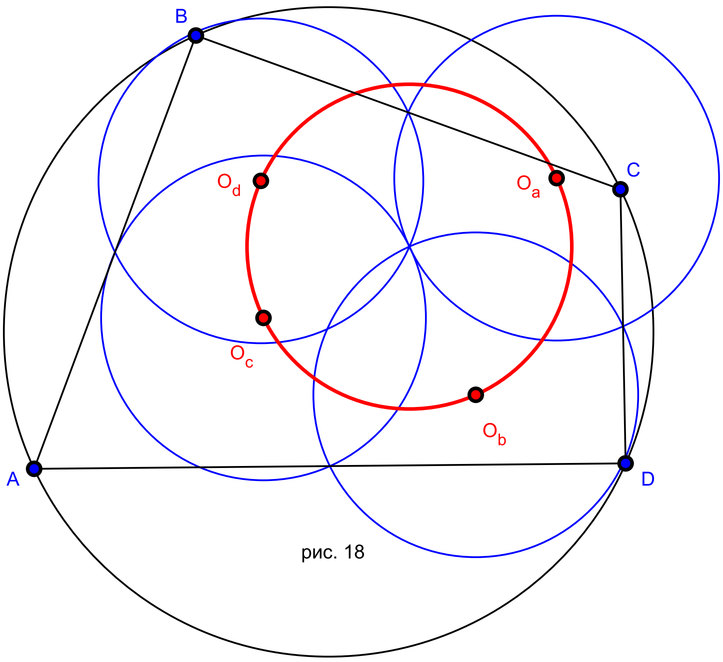

рис. 18

Пусть H_c, H_d – ортоцентры треугольников ABD, ACD соответственно, а X, Y – середины отрезков BH_c, CH_b соответственно. Как мы выяснили выше в доказательстве окружности девяти точек для треугольника, O_c, O_b – середины отрезка XN, YN соответственно, где N – середина стороны AD(рис. 19).

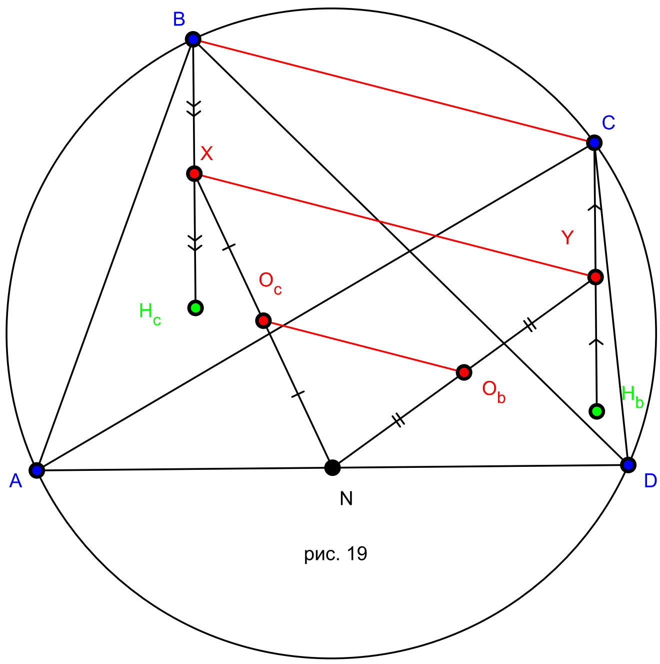

рис. 19

Мы знаем, что BCH_bH_c параллелограмм, тогда получаем, что XY – отрезок, соединяющий середины противоположных сторон параллелограмма, поэтому $XY||BC$. С другой стороны, в треугольнике XNY отрезок O_bO_c является средней линией, поэтому $O_cO_b||XY$ Следовательно, $O_cO_b||BC$, аналогичными рассуждениями верны и для других пар сторон четырёхугольников $ABCD$ и $O_aO_bO_cO_d$, т.е. получаем, что у этих четырёхугольников стороны попарно параллельны, следовательно, и углы между соответсвующими сторонами равны. Но раз в четырёхугольнике $ABCD$ $\angle B + \angle D = 180^\circ$, тогда и $\angle O_b + \angle O_d = 180^\circ$(рис. 20).

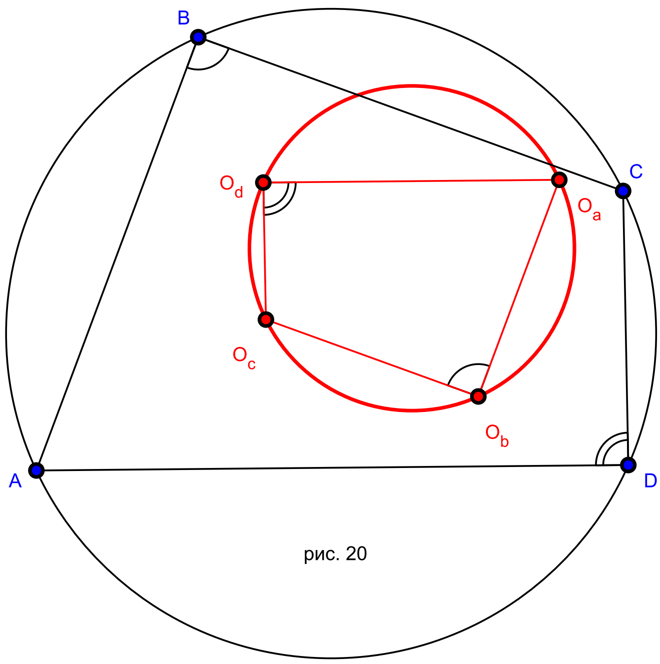

рис. 20

Откуда и следует вписанность четырёхугольника $O_aO_bO_cO_d$. $\square$

Оказывается, что эти четыре окружности девяти точек пересекаются в одной точке(рис. 18)! Согласно упражнению 1 получаем, что $XN = R = YN$, где R – радиус окружности описанной вокруг четырёхугоьлника $ABCD$, т.е. треугольник XNY – равнобедренный(рис. 21).

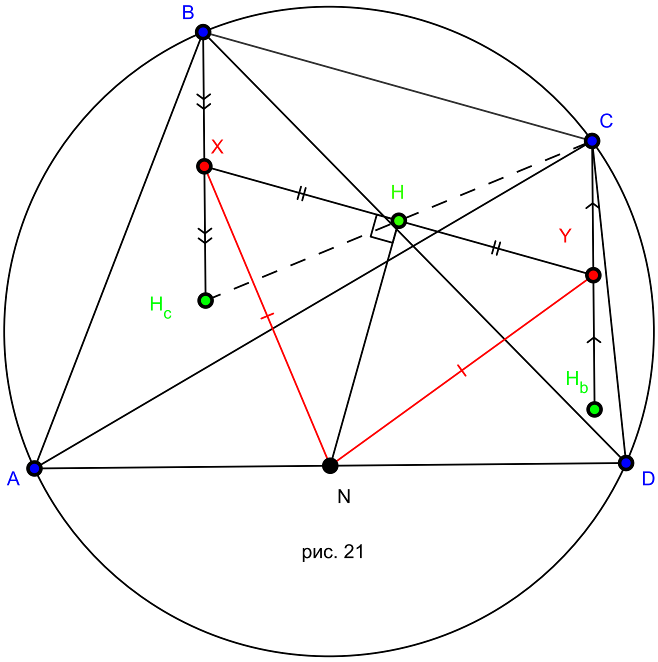

рис. 21

С другой стороны, как мы выяснили выше, ортоцентр H четырёхугольника $ABCD$ является центром(точкой пересечения диагоналей) параллелограмма BCH_bH_c. Нетрудно видеть, что отрезок XY проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма BCH_bH_c, т.е. через точку H, при этом $XH = HY$. Таким образом, NH является медианой в равнобедренном треугольнике XNY, поэтому $\angle XHN = 90°$. Следовательно, точка H лежит на окружности с диаметром XN, т.е. на окружности девяти точек треугольника ABD. Аналогично можно показать, что точка H лежит и на трёх оставшихся окружностях девяти точек. Итак, мы доказали, что окружности девяти точек пересекаются в ортоцентре четырёхугольника! □

Но оказывается, что окружности девяти точек треугольников ABC, BCD, CDA, DAB пересекаются в одной точке для любого четырёхугольника $ABCD$, а не только для вписанного!

Теорема 5. *Окружности девяти точек треугольников ABC, BCD, CDA, DAB пересекаются в одной точке.* [1]

[1] В 2003 году это утверждение предлагалось доказать участникам математической олимпиады города Санкт-Петербург.

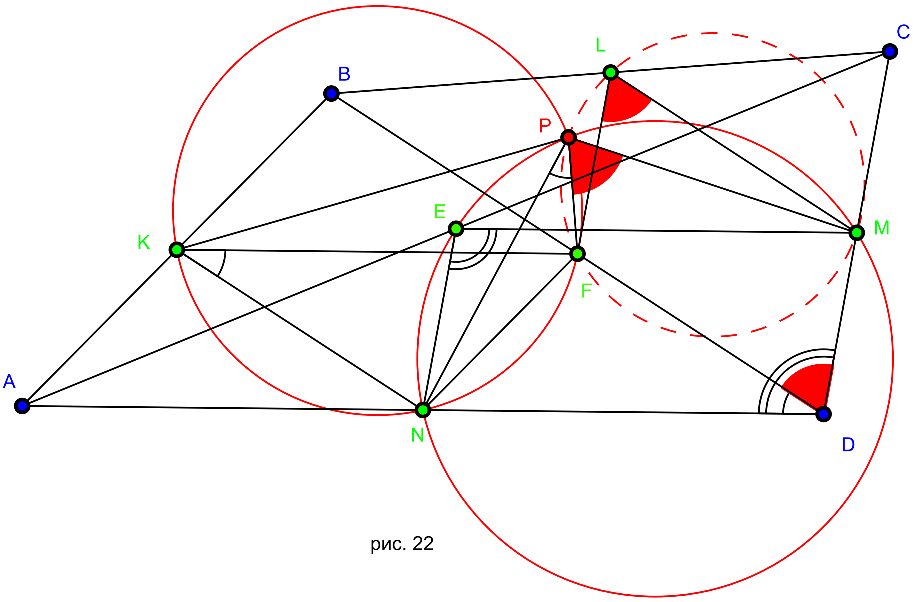

рис. 22

Пусть K, L, M, N, E, F – середины отрезков AB, BC, CD, DA, AC и BD соответственно(рис. 22). Тогда окружность девяти точек для треугольника ABD – это просто окружность, проходящая через точки K, N, F (середины сторон этого треугольника), аналогично окружность девяти точек для треугольника ACD – окружность, описанная вокруг треугольника NEM. Пусть эти две окружности пересекаются в точке P. Заметим, что четырёхугольник $KFDN$ – параллелограмм(почему?), поэтому $\angle NKF = \angle NDF$. С другой стороны, $\angle NKF = \angle NPF$, т.к. опираются на одну дугу NF. Получаем, что $\angle NDF = \angle NPF$. Такими же рассуждениями приходим к равенству $\angle NDM = \angle NPM$. Остаётся заметить, что четырёхугольник $LMDF$ также является параллелограммом (почему?), поэтому $\angle FLM = \angle FDM$. Из полученных равенств приходим к такой цепочке:

$$\angle FPM = \angle NPM - \angle NPF = \angle NDM - \angle NKF = \angle NDM - \angle NDF = \angle FDM = \angle FLM.$$

Но равенство $\angle FPM = \angle FLM$ означает, что точки F, P, L, M лежат на одной окружности, т.е. точка P лежит на окружности девяти точек треугольника BCD. Аналогично доказывается, что точка P лежит и на окружности девяти точек треугольника ABC. Таким образом наше утверждение доказано. □Полученную точку P называют ***точкой Понселе*** четырёхугольника $ABCD$.

После этого возникает вопрос: а можно ли обобщить прямую Эйлера на случай невписанного четырёхугольника? При определении ортоцентра четырёхугольника мы использовали важную лемму, т.е. то что четырёхугольник вписан, да и какой аналог центру описанной окружности можно придумать для проивзольного четырёхугольника? Но оказывается, что есть такое утверждение.

***Теорема* 6** (**А. Г. Мякишев**). *Пусть R – точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, G – центроид четырёхугольника, O – точка пересечения диагоналей, H – точка пересечения прямых, соединяющих ортоцентры треугольников ARD и BRC, ARB и CRD. Тогда G – середина OH.* [2]

Как мы отмечали выше, центроид G четырёхугольника совпадает с серединой отрезка FE , E и F – середины диагоналей AC и BD соответственно(рис. 23).

[2]Эта задача предлагалась в 2005 году участникам финального тура геометрической олимпиады им. И. Ф. Шарыгина.

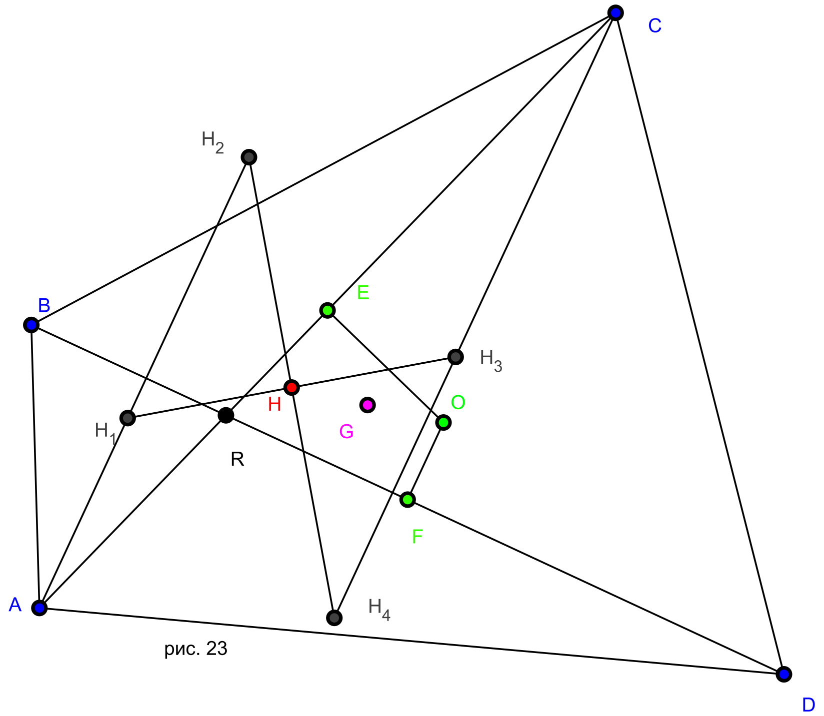

рис. 23

Далее, четырёхугольник $H_1H_2H_3H_4$ является параллелограммом, т.к. его противоположные стороны попарно параллельны. Поэтому точка H совпадает с серединой отрезка H_2H_4. Теперь заметим, что отрезки H_2H_4 и AC заключены между параллельными прямыми AH_2 и CH_4, следовательно, прямая HE, проходящая через середины этих отрезков, параллельна прямым AH_2 и CH_4 (это следует из теоермы о средней линии). Таким образом, получаем, что $HE||CH_4$, но $CH_4||OF$(почему?), следовательно, $HE||OF$. Аналогично убеждаемся, что и $HF||EO$. Итак, получаем, что четырёхугольник $HEOF$ – параллелограмм, а раз точка G – середина одной его диагонали EF, то она является серединой и другой его диагонали HO, что и завершает доказательство.

□

Задачи

***Задача* 3 (Кубок Колмогорова. 2005 год.).** *Высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки M и N — середины отрезков BC и AH соответственно. Докажите, что расстояние между точками пересечения прямой MN с биссектрисами внешнего и внутреннего углов при вершине A равно AH.*