О капризах биссектрисы!

Биссектриса, медиана, вывсота являются, пожалуй, самыми известными персонажами, связанными с треугольниками. Знакомимся мы с ними ещё в самом начале курса геометрии. Затем последовательно устанавливаем, что три биссектрисы, три выстоты и три медианы пересекаются-таки в одной точке. И до той поры неясно чем же, собственно, какой-то из этих отрезков «хуже», или «лучше», других. Затем у нас возникает естественное желание найти длины высоты, биссектрисы и медианы, зная стороны треугольника.

Упр. №1. Докажите, что

а) $m_a^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$.

б) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4}$.

в) $l_a = \sqrt{\frac{4p(p-a)bc}{(b+c)^2}}$.

г) $h_a = \frac{bc}{2R}$.

д) $l_a = \frac{2bc\cos(\alpha/2)}{b+c}$.

Тут биссекстрису удалось укротить. Опять же в самомо начале курса геометрии появляются некоторые критерии равнобедренного треугольника. Наша интуиция подсказывает нам, что если взять в треугольнике два симметричных элемента и потребовать их равенства, то этого будет достаточно для равнобедренности треугольника.

Упр. №2. В треугольнике равны две

а) медианы,

б) высоты.

Докажите, что треугольник равнобедренный.

Последние две задачи решаются просто, но почему же там нет анологичного пункта для биссектрис? Оказывается, что тут биссектриса показывает свой характер.

Теорема Штейнера-Лемуса.

Если две биссектрисы треугольника равны, то треугольник является равнобедренным.

Согласно истории, эта задача была послана в 1840 году С. Лемусом великому геометру Якобу Штейнеру с целью получить чисто геометрическое доказателсьвто. Штейнером было получено довольно-таки сложное доказательство. Сейчас известно несколько из различных доказательств, некоторые из которых мы и рассмотрим. Перед тем как читать доказательства попробуйте придумать своё, чтобы насладится красотой представленных.

`Доказательство 1.` Первое доказательсвто будет вычислительного характера. Согласно *Упр.1(д)* мы знаем, что длины биссектрис выражается формулами:

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}, l_b = \frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a+c}.$$

Предположим теперь, что треугольник не является равнобедренным, например, $\alpha > \beta$, тогда, поскольку против большей стороны лежит больший угол, то $a > b$. Получаем следующую цепочку неравенств :

$$\alpha > \beta \Rightarrow \frac{\alpha}{2} > \frac{\beta}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \cos\left(\frac{\beta}{2}\right).$$

Теперь нетрудно убедится в справедливости неравенства:

$$\frac{a\cos(\frac{\beta}{2})}{a+c} > \frac{b\cos(\frac{\alpha}{2})}{b+c}. \qquad *$$

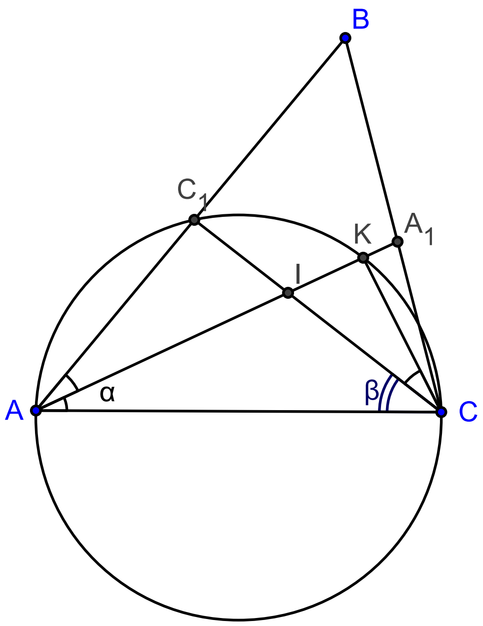
В самом деле, неравенство (*) равносильно следующему:

$$ab\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)+ac\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)>ab\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)+bc\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow$$
$$ab\left(\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)+c\left(a\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)-b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)>0.$$

Тогда, умножая обе части неравенства (*) на c, сопоставляю с формулой для биссектрис получим, что биссектрисы неравны. Пришли к противоречию, стало быть $\alpha=\beta$, т.е. треугольник ранвобедренный.

Однако, только что приведённое доказательство, носит сокрее алгебраический характер, а хотелось бы иметь геометрическое. Вот одно из наиболее популярных геометрических доказательств.

`Доказательсвто 2.`



Опять же допустим, что треугольник ABC неравнобедренный, например $\angle C>\angle A$. Введём обозначения $\angle A=2\alpha, \angle C=2\beta$. Пусть биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке I. Обозначим через K точку пересечения биссектрисы AA_1 с описанной окружностью треугольника AC_1C, тогда $\angle C_1CK=\alpha$. Осталось сделать последний рывок – теорема синусов!

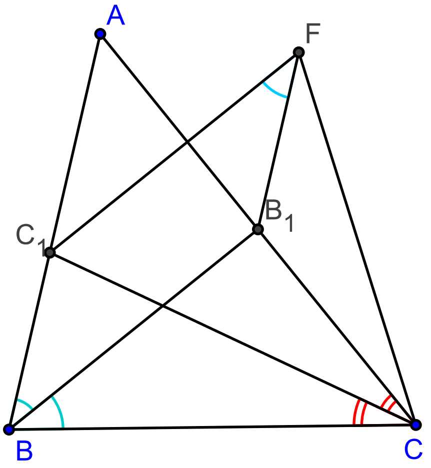
$$AK=2R\sin(\beta+\alpha), CC_1=2R\sin(2\alpha).$$

Но ведь $\sin(\beta+\alpha)>\sin(2\alpha)$[1]$\Rightarrow AK>CC_1$. Опять получили противоречие.

Приведём теперь менее известное, но также красивое

`Доказательство 3.` Снова допустим, что при равенстве биссектри треугольник равнобедренным не становится, нарпимер $\angle B>\angle C$. Сравним теперь треугольники B_1BC и C_1CB. В них имеется пара равных сторон (биссектрисы ведь по условию равны!), $\angle C_1CB<\angle B_1BC$, поэтому $B_1C<C_1B$. Теперь начинается волшебство, достраиваем треугольник C_1BB_1 до параллелограмма BC_1FB_1.

[1]Продумайте, пожалуйтса, почему можно утверждать, что оба угла 2α и $\beta+\alpha$ являются острыми.

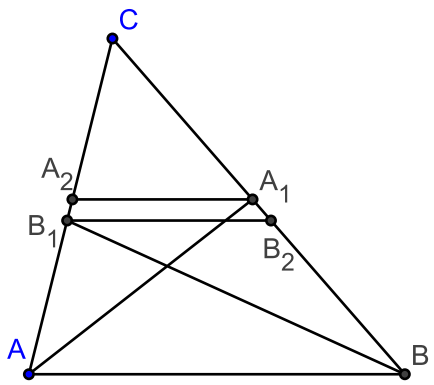


По свойству параллелограмма $BC_1 = FB_1$, тогда из треугольника FB_1C получаем, что $\angle B_1FC > \angle B_1CF$ (против большей стороны лежит больший угол), поэтому в треугольнике C_1CF $\angle C_1CF < \angle C_1FC$, откуда получаем, что $CC_1 > C_1F$, но ведь $C_1F = BB_1$ (по свойству параллелограмма). И опять противоречие.

Имеется ещё одно похожее

`Доказательсвто 4.`

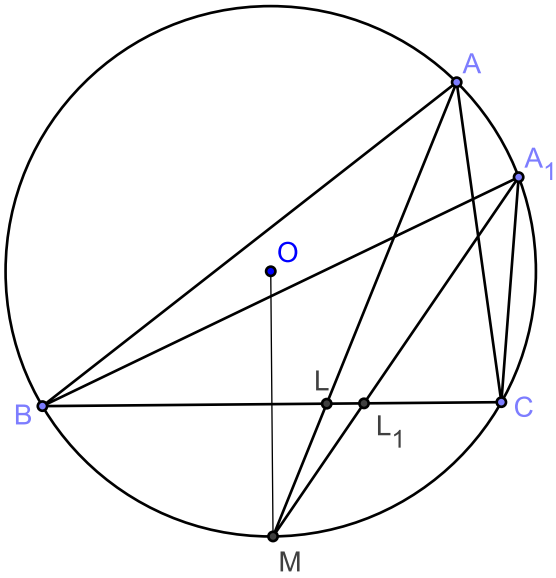
И вновь положим, что треугольник неравнобедренный. Через точки A_1 и B_1 (основания биссектрис) проведём прямые параллельные стороне AB. Обозначим точки пересечения прямых со сторонами треугольника A_2 и B_2. Для определённости будем считать, что $B_1B_2 < A_1A_2$



Нетрудно углядеть, что треугольники AA_1A_2 и BB_1B_2 равнобедренные (например, $\angle CBB_1 = \angle ABB_1 = \angle BB_1B_2$), т.е. мы имеем дело с двумя равнобедренными треугольниками с равными основаниями, а вот боковые стороны у них разные: $A_1A_2 > B_1B_2$. Откуда заключаем, что $\angle B_1B_2B > \angle A_1A_2A$, но тогда, используя параллельность прямых $(A_1A_2||B_1B_2||AB)$, получим что $\angle B < \angle A$, тогда углядываем из трапеции AA_2A_1B, что $A_1B > AA_2$, а тогда рукой подать до противоречия: $B_1B_2 = B_2B > A_1B > AA_2 = A_1A_2$.

Однако, наиболее гемеотрическим доказательстов, на мой взгляд, является

`Доказательство 5.` В этом доказательстве мы докажем *специальный* признак равенства треугольников. Пусть даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, AL и A_1L_1 – биссектрисы, тогда если $\angle A = \angle A_1, AL = A_1L_1$ и $BC = B_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. В самом деле, равенство сторон и противолежащих углов, согласно теореме синусов, гарантрует нам равенсто описанных окружностей. Наложим один треугольник на другой так, чтобы стороны BC и B_1C_1 совпали, пусть вершины A и A_1 не совпали, тогда опишем вокруг треугольника ABC окружность. Точка C_1 будет лежать на этой окружности в силу того, что радиусы описанных окружностей равны.

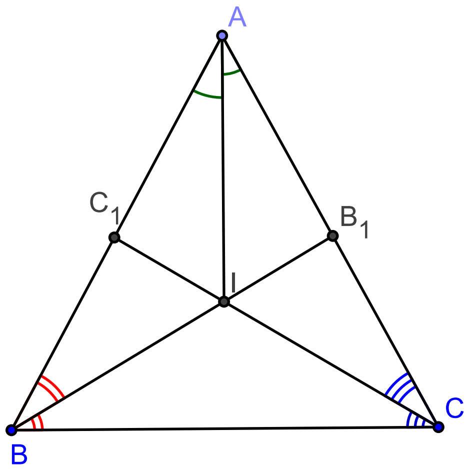


Для определённости будем считать, что A_1 лежит на дуге AC, тогда отсюда следует следующих два очевидных наблюдения:

$$MA > MA_1, \angle OML_1 > \angle OML \Rightarrow ML_1 > ML \Rightarrow AL > AL_1,$$

что противоречит условию, т.е. признак доказан.

Теперь-то для доказательства теоремы Штейнера-Лемуса остаётся взглянуть на картинку:



Ещё мгновение и мы понимаем, что треугольники ABB_1 и ACC_1 равны ,по только что доказанному признаку, ведь $\angle A$ – общий, $BB_1 = CC_1$ – по условию, AI – общая биссектриса для этих треугольников (а почему, кстати, это вдруг AI биссектриса?). Следовательно, $AB = AC$. Совершенно потрясающее доказательство!

Упр. №3. Биссектрисы углов B и C пересекают медиану AD в точках E и F соответственно. Известно, что $BE = BF$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

Упр. №4. (Областной этап Всероссийской олимпиады. 1995 год.) В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ отрезки CD и C_1D_1 – биссектрисы углов C и C_1 соответственно. Известно, что $AB = A_1B_1, CD = C_1D_1$ и $\angle ADC = \angle A_1D_1C_1$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Продолжим. Напомним, что теорема Штейнера-Лемуса возникла из совершенно естественного вопроса: будет ли треугоьник равнобедренным, если в нём равны два каких-либо симметричных элементов. Напрашивается положительный ответ, к тому же примеры не давали повода сомневаться.

Упр. №5. В треугольнике ABC проведены три а) медианы,

б) высоты.

AA_1, BB_1 и CC_1. Оказалось, что $B_1C_1 = A_1C_1$. Докажите, что треугольник ABC является равнобедренным.

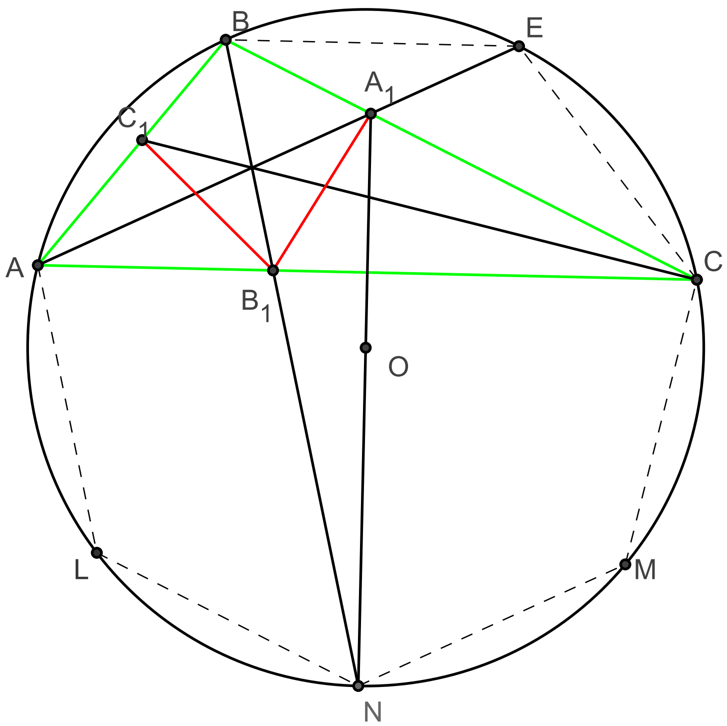
Почему же опять в этот список не попала биссектриса? Может просто опять же доказывается труднее?! Нет! Всё дело том, что утверждение для биссектрис неверно, а именно существует *неравнобедренный* треугольник ABC такой, что если в нём соединить основания биссектрис A_1, B_1 с C_1, то $A_1C_1 = C_1B_1$! Автором этого нестардантного утрверждения является выдающийся российский геометр Игорь Фёдорович Шарыгин, который, ксати сказать, не нашёл геометрического доказательства этого факта, т.е. не удалось найти конкретный треугольник, для которого утверждение верно, но удалось установить, что один из его угов лежит в интервале $\left(\arccos\frac{\sqrt{17}-5}{4}; \arccos(-\frac{1}{4})\right)$ (это условие является необходимым и достаточным), т.е. примерно от 102° до 104°. Из-за «кошмарности» ответа считалось, что геометрически нормального решения здесь и вовсе нет. Но не тут-то было!

(Задачник «Кванта», М2001. С. Токарев) Дан треугольник ABC, в котором проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Известно, что величины углов A, B и C относятся как $4 : 2 : 1$. Докажите, что $A_1B_1 = A_1C_1$.

`Решение.` Проверим прежде всего, что в треугольнике с таким соотношением углов есть угол лежащей в нужном интервале. Пусть наименьший угол равен α, тогда можно найти:

$$\alpha + 2\alpha + 4\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{180^\circ}{7} \Rightarrow 102^\circ < \frac{4 \cdot 180^\circ}{7} < 104^\circ,$$

т.е. один угол треугольника лежит в нужном нам интервале! По идее это всё, что нужно, но нас-то интересует геометрическое доказательство. Откуда же взялись столь странные углы? И почему отношение именно такое? Думается следующая картинка прояснит всю ситуацию.



Оказывается, что такое соотношение углов взято вовсе не с потолка. Если мы рассмотрим правильный семиугольник $ABECMNL$, то в треугольнике ABC углы будут находится в отношении $1 : 2 : 4$. Нужно теперь показать, что $A_1B_1 = B_1C_1$, имею такую картинку это сделать не очень трудно, прежде всего заметим, что биссектриса угла B (луч BB_1) пройдёт через вершину N семиугольника, т.к. точка N разбивает дугу AC на две равных, анологично замечаем, что биссектриса AA_1 проходит через точку E. Отметим также, что диагонали семиугольника AC и BN равны и симметричны относительно диаметра OM, поэтому $AB_1 = BB_1$ и $B_1N = B_1C$. Точно также замечаем, что диагонали AE и BC симметричны относительно ON, поэтому точка A_1 лежит на прямой ON. Откуда найдем, что

$$\cup AB = \cup BE \Rightarrow \angle BCA = \angle BNE \Rightarrow \angle BNA_1 = \angle ACC_1.$$

Стало быть, если мы сделаем поворот вокруг точки B_1, который переводит точку C в точку N, то при этом же повороте точка A перейдёт в точку B, угол CAB переходит в угол NBC, а угол C_1CB_1 – в угол A_1NB_1, поэтому точка пересечения прямых AB и CC_1 (точка C_1) перейдёт в точку пересечения прямых BC и NA_1 (точку A_1). Стало быть $C_1B_1 = A_1B_1$.

Последний пример показывает, что не во всех случаях стоит полагаться на интуицию.

А если, потребовать, чтобы треугольник, образованный основаниями биссектрис, был равносторонним будет ли в таком случае исходный треугольник равносторонним? Тут уже биссектрисе не удаётся «улезнуть». В замечание перед предыдущей задаче говорилось, что для того, чтобы из равнобедренности треугольника в основания биссектрис *не вытекала* равнобедренность исходного необходимо и достаточно, чтобы один из его углов был в пределах от $102°$ до $104°$, но три тупых угла у треугольника не бывает, этим наше доказательство и завершается. Опять же данное решение не явялется геометричным, поэтому познее была придумана следующая задача.

(«Задачник Кванта»М1862) В треугольнике ABC биссектрисы AD, BE и CF пересекаются в точке I. Докажите, что если

а) $ID = IE = IF$,

б) DFE – равносторонний,

то треугольник ABC – равносторонний.

Авторами (Заславским и Сендеровым) было придумано доказательсто исключительно геометрическое без тригонометрии и счёта! Придумайте его и Вы, а если не получится, то загляните «Квант» №6 за 2003 год (http://kvant.mirror1.mccme.ru).

Быть может Вы думаете, что на этом капризы закончились? Вовсе нет!

Упр. №6. Постройте треугольник по

а) трём медианам,

б) трём высотам.

Почему же нет пункта для биссектрис?! Думаю, Вы уже обо всём догадались, оказывается по трём биссектрисам треугольник построить нельзя[2]. С другой стороны, если заданы три длины биссектрис, то треугольник строиться однозначно, при этом, что потрясает на длины биссектрис нет *никаких* ограничений, а именно верна следующая

Теорема. Для любых положительньных чисел l_a, l_b, l_c существует единственный треугольник с биссектрисами, длины которых равны l_a, l_b, l_c.

Доказательство этого факта (и много интересного) можно найти в статье Акулича И. Жукова А., «Однозначно ли определяется треугольник?» в «Кванте» №1 за 2003 год (http://kvant.mirror1.mccme.ru/2003/01/index.htm).

В заключении отметим, что биссектриса обладает многими удивительными свойствами, со многими из можно познакомиться в замечательной статье И.Ф. Шарыгина «Вокруг биссектрисы» журнала «Квант» №8 за 1983 год. С другой же стороны биссектриса не перестаёт удивлять, например, загляните в статью Куланина Е. «Об одной трудной геометрической задаче» в «Кванте» №7 за 1992 год.

[2]Доказательсво можно прочесть в статье Манина Ю. О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки// Энциклопедия элементарной математики. Т. 4.(http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/encikl/enc-el-4.htm)