От прямой Симсона до теоремы Дроз-Фарни

Элементарная геометрия буквально усыпана красивыми жемчужинами, которые доставляют огромное удовольствие тем, кто ими любуется. Тем поразительнее тот факт, что и сами по себе эти шедевры могут выступать в качестве вспомогательных утверждений для доказательства других геометрических шедевров.

Прямая Уоллеса-Симсона

Начнём мы наш тур с замечательной *прямой Симсона.*[1]

Основания перпендикуляров, опущенных из точки P описанной окружности треугольника на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой.(рис. 1)

`Доказательство.`

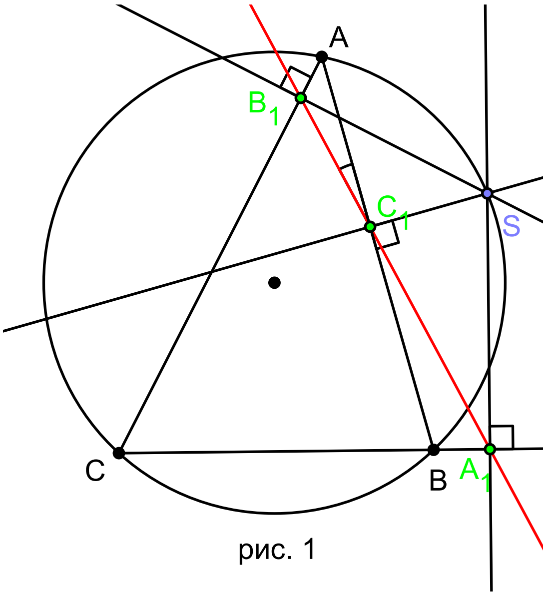


рис. 1

Если мы покажем, что $\angle B_1C_1A = \angle BC_1A_1$, то наше утверждение будет доказано. В доказательстве во всей красе показывает себя метод «вспомогательной окружности». Что это значит?!(рис.2)

Краткости ради введём обозначения: $\angle B_1C_1A = \alpha$ и $\angle BC_1A_1 = \beta$. Точки B_1, C_1, A и S лежат на одной окружности с диаметром AS(почему?). Следовательно, $\angle B_1C_1A = \angle B_1SA = \alpha$ (так как оба этих угла «смотрят» на дугу B_1A). Тогда из треугольника B_1SA заметим, что $\angle B_1AS = 90° - \alpha$. Четырёхугольник $CASB$ вписан в окружность, поэтому $\angle CAS + \angle CBS = 180°$[2] $\implies \angle SBC = 90° + \alpha \Rightarrow \angle SBA_1 = 90 - \alpha$. Как и выше, из прямоугольного треугольника SBA_1 находим, что $\angle BSA_1 = \alpha$. Осталось лишь заметить, что точки C_1, B, A_1 и S лежат на одной окружности с диаметром BS. Откуда следует равенство углов $\angle BSA_1 = \angle A_1C_1B$ (оба «смотрят» на дугу BA_1). Таким образом получили, что $\alpha = \beta$. □

Нам удалось доказать теорему!

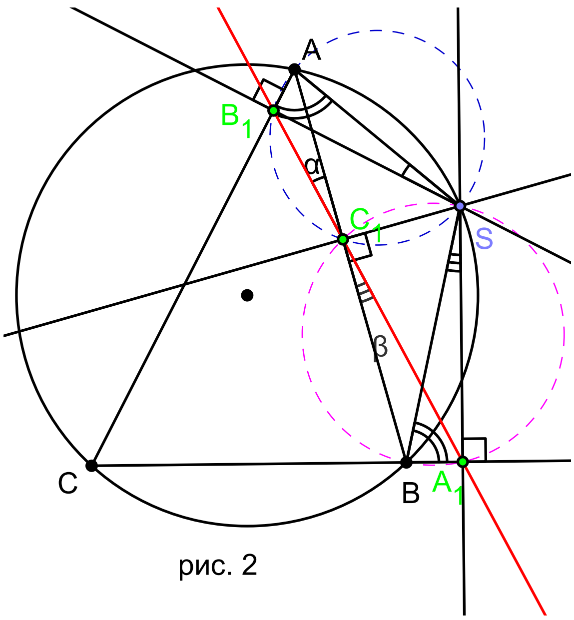


рис. 2

---

[1] Открытие этой прямой долго приписывалось Роберту Симсону, но в действительности она была открыта лишь в 1797 г. Вильямом Уоллесом. Поэтому наиболее справедливое название *прямая Уоллеса*, хотя наиболее популярным является название *прямая Симсона*.

[2] Сей факт широко используется при решении задач, связанных с окружностью.

Упр. №1. Две окружности пересекаются в точках M и N. Через точки M и N проводятся прямые, пересекающие окружности в точках A и B, C и D соответственно. Докажите, что $AC||BD$.

Оказывается, что верно и обратное утверждение.

Если основания перпендикуляров, опущенных из некоторой точки S на стороны треугольника или их продолжения, лежат на одной прямой, то точка S лежит на описанной окружности треугольника.

Упр. №2. Докажите это.

Прямая Симсона обладает многими удивительными свойствами. Оказывается, кроме указанных потрясающих свойств, существует *обобщение прямой Симсона.*

Проекции точки P описанной окружности четырёхугольника $ABCD$ на прямые Симсона треугольников BCD, CDA, DAB и BAC лежат на одной прямой (прямая Симсона вписанного четырёхугольника).

Доказательство.

Обозначим через B_1, C_1 и D_1 проекции точки P на прямые AB, AC и AD(рис. 3). Опять же замечаем, что точки A, B_1, P, C_1 и D_1 лежат на одной окружности с диаметром AP. С другой стороны, вспомнив определение прямой Симсона для треугольника, получим, что прямые B_1C_1, C_1D_1 и D_1B_1 являются прямыми Симсона точки P относительно треугольников ABC, ACD и ADB соответственно. Теперь же последнее усилие. Заметим, что проекции точки P на прямые Симсона этих треугольников лежат на одной прямой – прямой Симсона треугольника $B_1C_1D_1$. Точно так можно показать, что на одной прямой лежит любая тройка рассматриваемых точек, следовательно, и все они лежат на одной прямой. □

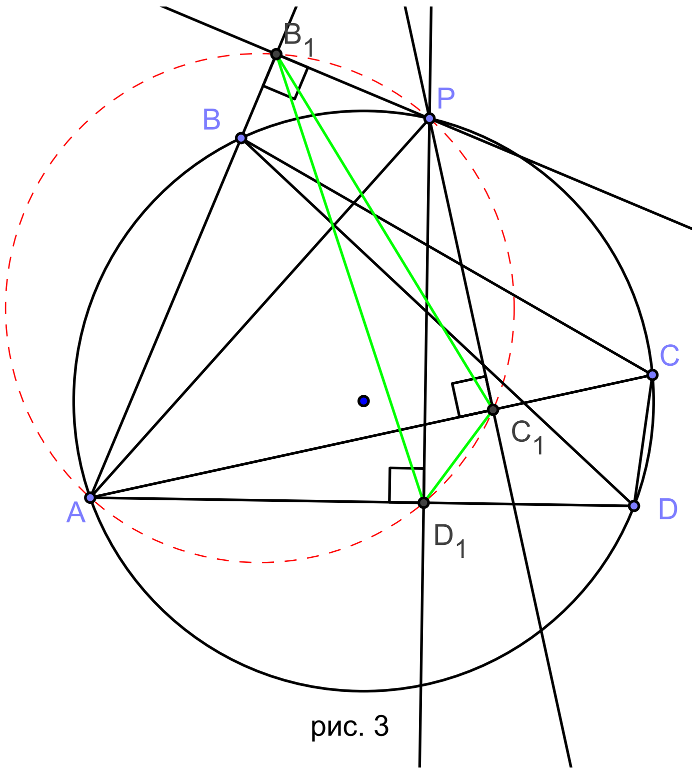


рис. 3

Любовь к обобщениям привела исследователей к следующему результату:

Аналогично по индукции можно определить прямую Симсона вписанного n-угольника как прямую, содержащую проекции точки P на прямые Симсона всех $(n-1)$-угольников, полученных выбрасыванием одной из вершин n-угольника.

Так, например, только что мы разобрались с прямой Симсона для четырёхугольнника. Теперь для примера разберём прямую Симсона для пятиугольника. Итак, пусть есть пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Сначала «выбрасываем» вершину A_1, тогда останется четырёхугольник $A_2A_3A_4A_5$, а для него прямая Симсона уже определена. Аналогично возникают ещё пять прямых Симсона(по очереди выбрасываем вершины A_2, A_3, A_4, A_5). Так вот, проекции произвольной точки P описанной окружности на эти пять прямых лежат на одной прямой. Это утверждение верно и для произвольного n-угольника.

Упр. №3. Докажите это утверждение для пятиугольника.

С прямой Симсона естественным образом связана другая замечательная прямая – *прямая Штейнера.*

Точку R описанной окружности треугольника ABC отразили симметрично относительно сторон треугольника. Полученные таким образом три точки будут лежать на одной прямой, которая называется прямой Штейнера точки R относительно треугольника ABC.

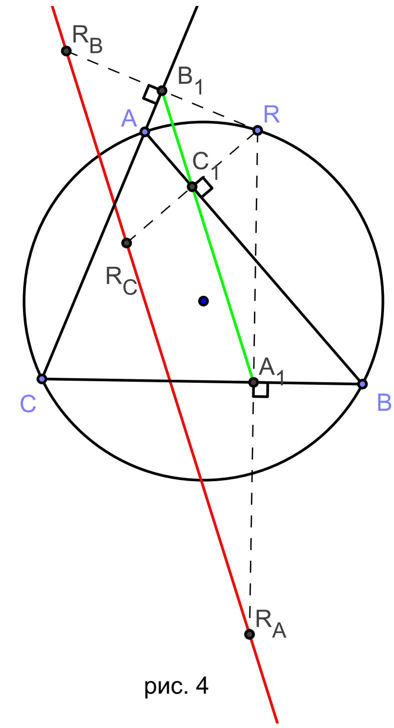


рис. 4

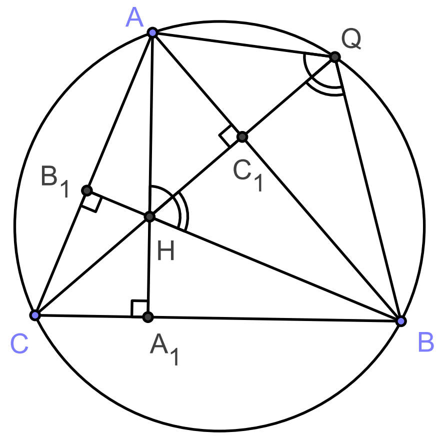


рис. 6

Для начала поймём, почему же эти точки будут лежать на одной прямой (рис. 4). Точки B_1, C_1, A_1 лежат на одной прямой, ибо это прямая Симсона. Точки же R_B, R_C, R_A находятся от точки R в два раза дальше, чем точки B_1, C_1, A_1, поэтому они тоже лежат на одной прямой. $\square$

Чем же замечательна прямая Штейнера?

Прямая Штейнера проходит через ортоцентр (точку пересечения высот) треугольника.

`Доказательство.` Здесь уже совсем просто не получится, нужны знать некоторые «хитрости». Итак, пусть прямая Штейнера точки R относительно треугольника ABC пересекает высоту CD в точке H(рис. 5). Наша цель показать, что точка H есть ортоцентр. Как это сделать, сразу не разглядеть. Но оказывается, что ортоцентр обладает следующим свойством-признаком.

Если ортоцентр треугольника отразить симметрично относительно стороно треугольника, то полученные точки лежат на описанной окружности треугольника.

`Доказательство.` Нам достаточно показать, что $\angle ACB + \angle AQB = 180°$. [3] Но $\angle CB_1H + \angle CA_1H = 90° + 90° = 180° \Rightarrow \angle B_1CA_1 + \angle A_1HB_1 = 180° \Rightarrow \angle B_1CA_1 + \angle AHB = 180°(\angle B_1HA_1 = \angle B_1CA_1)$. А вот точку Q мы получали в результате симметричного отражения точки H, следовательно, $\angle AHB = \angle AQB$, а поэтому $\angle ACB + \angle AQB = 180°$. $\square$

`Упр.№4.` Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Доказанный факт сыграет ключевую роль в нашем доказательстве.

[3]Здесь мы воспользуемся таким утверждением:*Вокруг четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма величин его противоположных углов равна* $180°$.

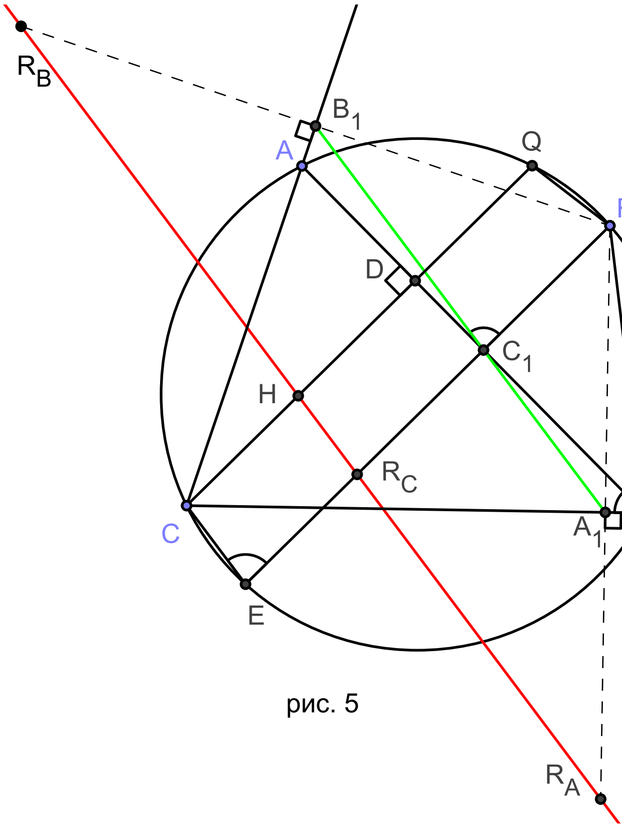


рис. 5

Вспомним, что при доказательстве теоремы Симсона(самой первой) было показано, что четырёхугольник RC_1A_1B вписанный, то есть $\angle A_1BR + \angle A_1C_1R = 180°$, но $\angle A_1C_1R + \angle B_1C_1R = 180°$(смежные углы) $\Rightarrow \angle B_1C_1R = \angle A_1BR$. Теперь видим, что $\angle CER = \angle CBR$, ибо оба угла опираются на дугу CR. Откуда получаем равенство углов $\angle CER = \angle B_1C_1R$, что в свою очередь говорит о параллельности прямых $CE||B_1C_1$. Однако же, понятно, что прямые Штейнера и Симсона параллельны, то есть $HR_C||B_1C_1$.

Теперь посмотрим на четырёхугольник $CERQ$(рис. 7). Во-первых, этот четырёхугольник является трапецией, ибо $CD \perp DC_1, ER \perp DC_1$. Во-вторых, раз эта трапеция вписана в окружность, трапеция равнобокая, то есть $CE = QR$. Сейчас же видим, что четырёхугольник HR_CE является параллелограммом, так как $CH||ER_C, CE||HR_C$, следовательно, $CE = HR_C$, поэтому четырёхугольник HR_CRQ — равнобокая трапеция. Вспомнив же, что C_1 – середина отрезка R_CR(так мы определяли точку R_C) и $DC_1 \perp RR_C$, несложно понять, что $HD = DQ$. [4] Наконец, используя «свойство-признак» для ортоцентра, получим что точка H является ортоцентром треугольника ABC. $\square$

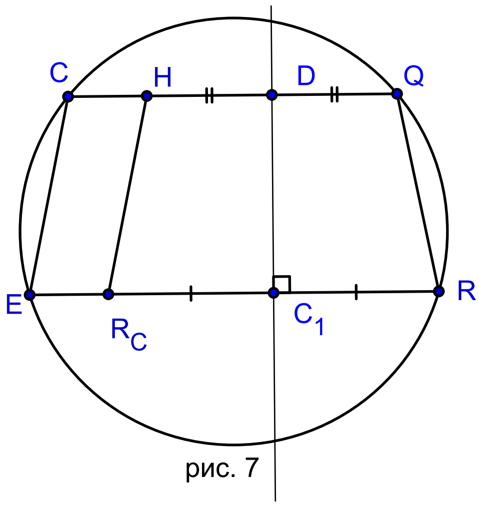


рис. 7

[4]Посмотрим на два равных треугольника $\Delta HR_CC_1 = \Delta QRC_1(HR_C = QR, R_CC_1 = C_1R, \angle HR_CC_1 = \angle QRC_1) \Rightarrow HC_1 = QC_1 \Rightarrow \Delta HC_1Q$ – равнобедренный, следовательно $HC_1 = C_1Q$.

Отметим некоторые следствия из приведённого рассуждения.

Следствие 1. Пусть точка R лежит на описанной окружности треугольника ABC, H – ортоцентр треугольника ABC. Прямая Симсона точки R делит отрезок RH пополам.

`Доказательство.` В предыдущем доказательстве мы показали, что прямая Симсона точки R (C_1K на рис. 8) параллельна прямой HR_C. Стало быть, глядя на треугольник R_CHR, по теореме о средней линии получим, что $HK = KR$.

Следствие 2. Три прямые, симметричные прямой Штейнера точки D относительно сторон треугольника, пересекаются в точке D.

`Упр. №6.` Докажите этот факт.

Из второго следствия следует, что если через ортоцентр треугольника провести произвольную прямую, то прямые, ей симметричные относительно сторон треугольника, будут пересекаться в одной точке, лежащей на описанной окружности треугольника.

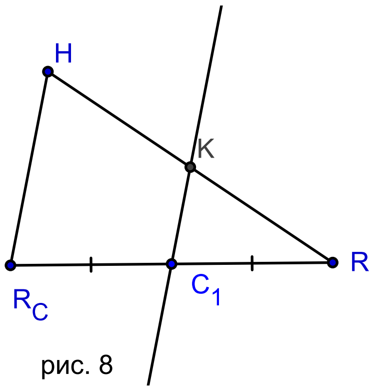


рис. 8

Точка Микеля.

В первой части мы могли убедиться, что вписанные углы порой приносят огромную пользу. Также весьма полезны они в следующем сюжете. Итак, пусть даны четыре прямые, образующие четыре треугольника.

Описанные окружности этих треугольников имеют общую точку, которую называют точкой Микеля (рис. 9).

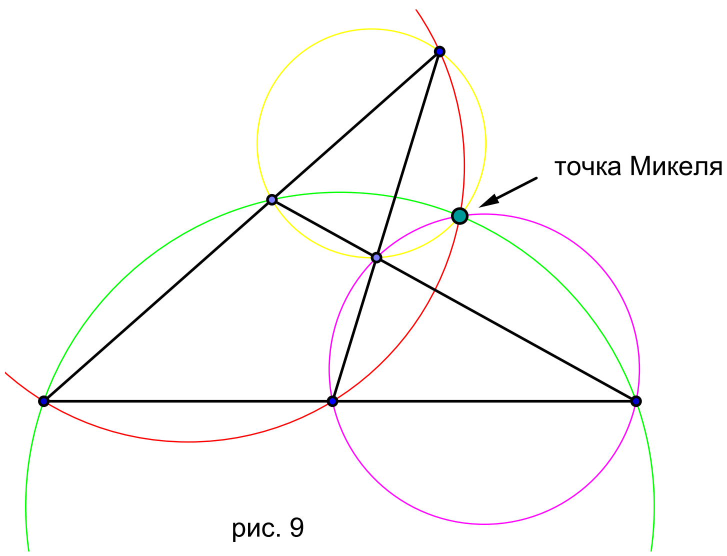


рис. 9

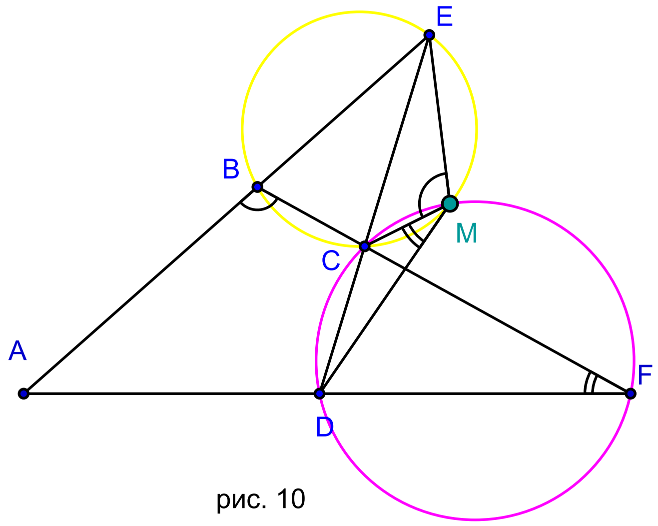


рис. 10

`Доказательство.` Пусть описанные окружности треугольников BEC и CDF пересекаются в точке M(рис. 10). Покажем, что эта же точка M лежит на описанной окружности треугольника AED, т.е. что четырёхугольник $AEMD$ является вписанным. Для этого опять достаточно показать, что $\angle EAD+\angle EMD = 180°$. Из вписанности четырёхугольника $BEMC$ заключаем, что $\angle EMC+\angle EBC = 180° \Rightarrow \angle ABC = \angle EMC$ (ведь $\angle EBC + \angle ABC = 180°$). Посмотрев же на вписанный четырёхугольник $MCDF$, видим, что $\angle CMD = \angle CFD$ (опираются на дугу CD). Значит справедлива следующая цепочка равенств: $\angle EAD + \angle EMD = \angle BAF + \angle EMC + \angle CMD = \angle BAF + \angle ABF + \angle AFB = 180°$, последнее равенство на теорему о сумме углов треугольника ABF. Анологично можно показать, что и описанная окружность треугольника ABF проходит через точку M. Доказательство завершено. □

Как и прямая Симсона, точка Микеля обладает интересными свойствами.

Родственная задача для геометрии треугольника можно сформулировать следующим образом.

Лемма. *Если на каждой стороне треугольника отметить по одной точке и через каждую вершину треугольника и отмеченные точки на смежных сторонах провести окружности, то три эти окружности пересекутся в одной точке*(рис. 11) .

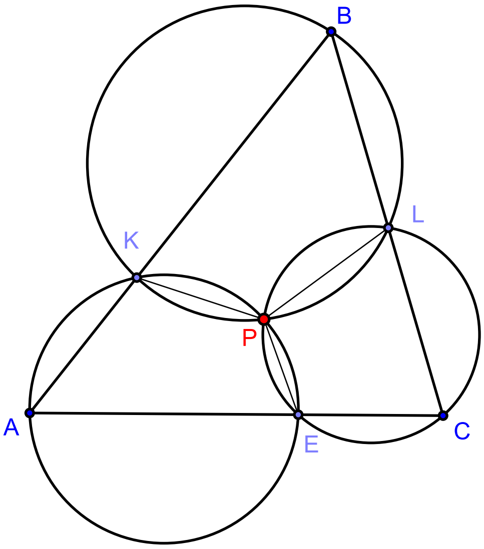


рис. 11

`Доказательство` похожее на то, которое мы видели только что, нужно совершить «круиз по углам». Пусть описанные окружности треугольников AKF и $BKPL$ пересекаются в точке P. Как и выше, покажем, что окружность, описанная вокруг треугольника FCL, проходит через точку P, для чего достаточно показать равенство $\angle FCL + \angle FPL = 180°$. Из вписанности четырёхугольников и свойств смежных углов получаем цепочку равенств: $\angle AKP + \angle AFP = 180° \Rightarrow \angle AKP = \angle PFC$. Анологично, $\angle BKP + \angle BLP = 180° \Rightarrow \angle BKP = \angle PLC$, но $\angle AKP + \angle BKP = 180°$, а значит, и равные им углы также дают в сумме 180°. □

Теорема Дроз-Фарни

В 1899 году Арнольд Дроз-Фарни опубликовал без доказательства следующую замечательную

Теорему. *Пусть две взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через ортоцентр треугольника, высекают на прямых, содержащих стороны треугольника, три отрезка. Середины этих трёх отрезков лежат на одной прямой*(рис. 12).

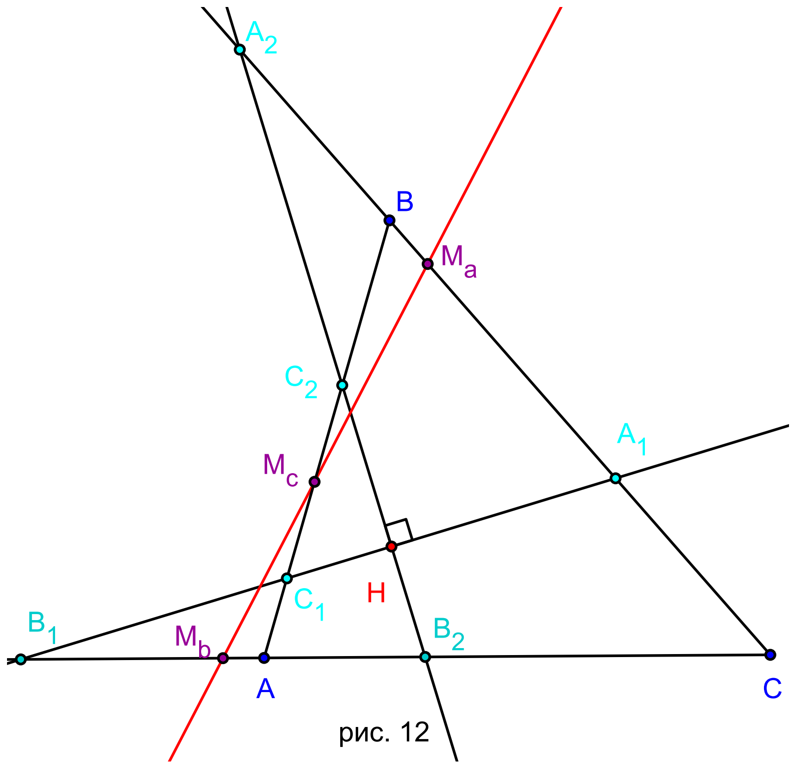
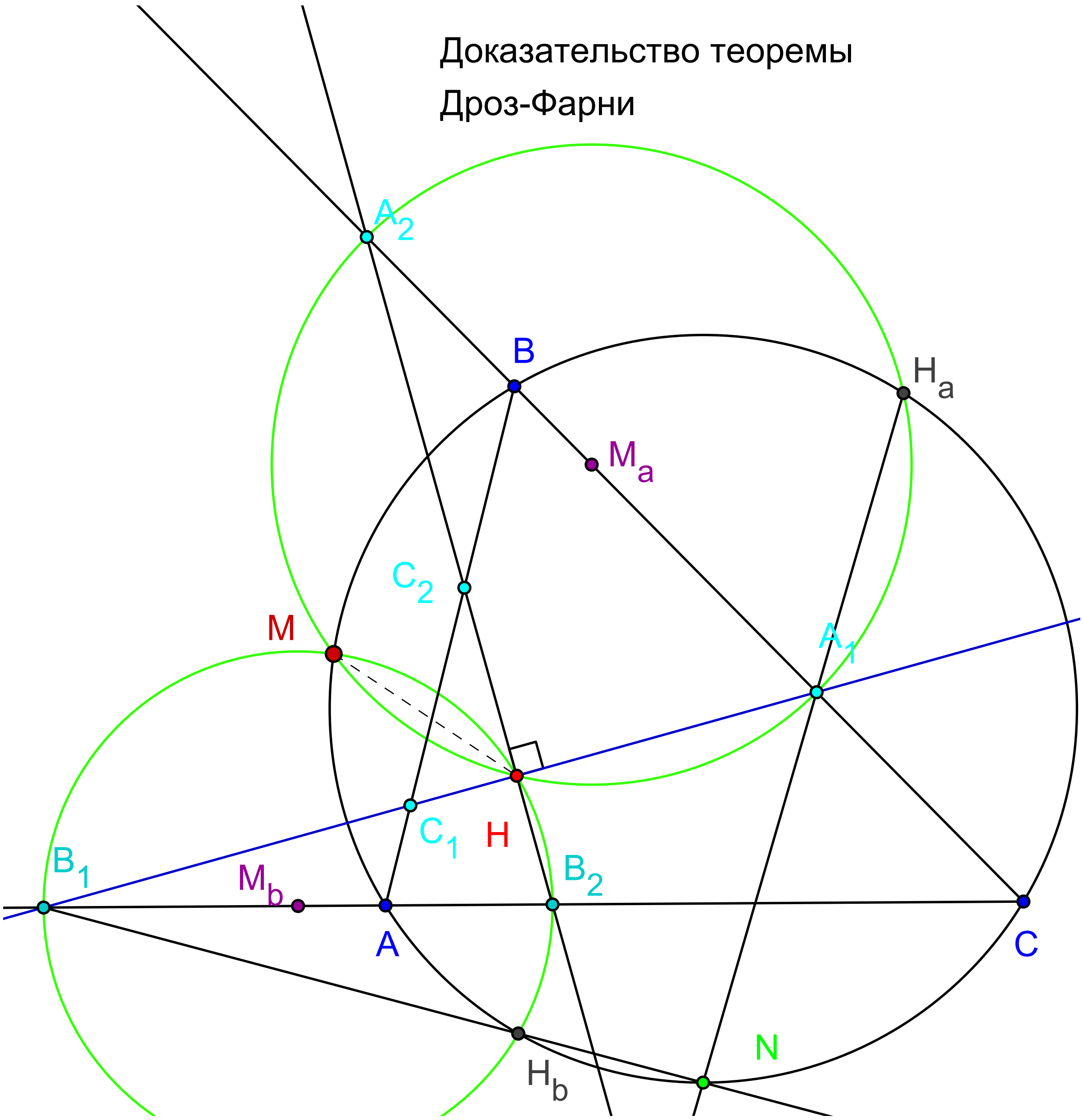


рис. 12

Оказывается факты, изложенные выше чудесным образом, переплетаются при доказательстве этой жемчужины геометрии.



Доказательство. Отразим ортоцентр H относительно сторон треугольника, полученные точки обозначим H_a, H_b и H_c(на рис. 13 точка H_c не изображена). Далее, построим на отрезках A_1A_2,B_1B_2 и C_1C_2, как на диаметрах, окружности. Назовём их $\mathfrak{C}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{C}_{\mathfrak{b}}, \mathfrak{C}_{\mathfrak{c}}$. Отметим, что точка H попадает на все эти три окружности(почему так?). Точки же M_a, M_b и M_c являются центрами этих окружностей, т.к. они середины диаметров. К тому же точки H_a, H_b и H_c лежат на окружности, описанной вокруг треугольника ABC («свойство-признак» для ортоцентра). Согласно следствию №2 в сюжете о прямой Штейнера(смотрите чуть выше) получаем, что прямые B_1H_b и A_1H_a пересекаются на описанной окружности треугольника ABC, обозначим её N. Осталось последнее усилее, рассмотрим треугольник B_1NA_1 и точки H_b, H, H_a, которые лежат на его сторонах(продолжениях).

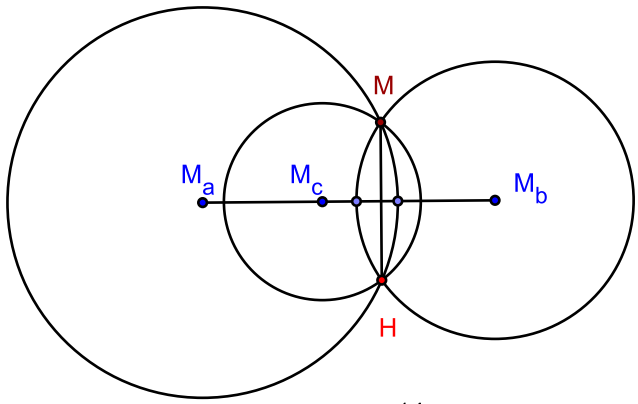


рис. 14

Применив для него лемму из предыдущей части, получаем, что описанная окружность треугольника ABC, окружности $\mathfrak{C}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{C}_{\mathfrak{b}}$ пересекаются в одной точке M. Анологично получим, что и окружность $\mathfrak{C}_{\mathfrak{c}}$ проходит через туже самую точку M! Суммирую всё, получим что три окружности $\mathfrak{C}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{C}_{\mathfrak{b}}, \mathfrak{C}_{\mathfrak{c}}$ пересекаются в двух общих точках M и H(рис. 14). Но центр окружности лежит на серединном перпендикуляре к хорде окружности MH. Тем самым, все три точки M_a, M_b, M_c лежат на одной прямой. $\square$

Задачи.

В заключении нашего повествования предлагается задачи о прямой Симсноа и точки Микеля, некоторые из них считаются классикой, другие менее известны.

Задача 1. Точки A, B и C лежат на одной прямой, точка P – вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, ACP и точка P лежит на одной окружности.

Задача 2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и из точки D опущены перпендикуляры DB_1 и DC_1 на прямые AC и AB; точка M лежит на прямой B_1C_1, причём $DM \perp BC$. Докажите, что точка M лежит на медиане AA_1.

Задача 3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность; l_a– прямая Симсона точки A относительно треугольника BCD, прямые l_b, l_c и l_d определяются аналогично. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

Задача 4. Точка P движется по описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что при этом прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC поворачивается на угол, равный половине угловой величины дуги, пройденной точкой P.

Задача 5. Докажите, что прямые Симсона двух диаметрально противоположных точек описанной окружности треугольника ABC перпендикулярны, а их точка пересечения лежит на окружности девяти точек. [5]

Задача 6. Прямая Симсона точки P, лежащей на описанной окружности треугольника ABC, перпендикулярна прямым, симметричным прямым PA, PB, PC относительно биссектрис углов A, B, C треугольника ABC соответственно.

Задача 7 (*М*МО 2006 г. Акопян.)**.** Дан треугольник ABC и точки P и Q, лежащие на его описанной окружности. Точку P отразили относительно прямой BC и получили точку P_a. Точку пересечения прямых QP_a и BC обозначим A_1. Точки B_1 и C_1 строятся анологично. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

Задача 8. Четыре прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности, проходящей через точку Микеля.

Задача 9. Прямая пересекает стороны AB, BC и CA треугольника(или их продолжения) в точках C_1, B_1 и A_1; O, O_a, O_b и O_c – центры описанных окружностей треугольников ABC, AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C; H, H_a, H_b и H_c – ортоцентры этих треугольников. Докажите, что:

а) $\Delta O_aO_bO_c \sim \Delta ABC$.

б) серединные перпендикуляры к отрезкам OH, O_aH_a, O_bH_b и O_cH_c пересекаются в одной точке.

Задача 10. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный. Докажите, что точка Микеля для прямых, содержащих его стороны, лежит на отрезке, соединяющем точки пересечения продолжений сторон. [6]

Задача 11. Точки A, B, C и D лежат на окружности с центром O. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а описанные окружности треугольников AEC и BED пересекаются в точках E и P. Докажите, что:

а) точки A, D, P и O лежат на одной окружности;

б) $\angle EPO = 90°$.

Задача 12. Даны четыре прямые. Докажите, что проекции точки Микеля на эти прямые лежат на одной прямой.

Задача 13. В тексте мы говорили об обобщении прямой Симсона. Придумайте обобщение точки Микеля.

---

[5] *Окружностью девяти точек* называю окружность, проходящую через середины сторон треугольника. При этом она проходит через основания высот, а также через середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с ортоцентром, итого 9 точек.

[6] Сравните эту задачу с **леммой из текста.**

Список литературы

[1] Jean-Louis Ayme, A purely synthetic proof of the Droz-Farny line theorem, *Fotum Geom.,* 4(2004)219-224.

[2] Праслов В. В. Задачи по планиметрии.

[3] Яглом И. Я. Комплексные числа.