

Комплексными числами называются выражения вида $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$, i — мнимая единица. Сложение и умножение выполняются в соответствии с обычными формулами раскрытия скобок с учётом того, что $i^2 = -1$, то есть $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$, $(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd)+(bc+ad)i$. Множество комплексных чисел обозначается символом $\mathbb{C}$.

Пусть $z = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда действительное число a называется действительной частью числа z и обозначается $\operatorname{Re} z$, а действительное число b называется мнимой частью числа z и обозначается $\operatorname{Im} z$.

Комплексное число $\bar{z} = a - bi$ называется комплексно сопряжённым к числу z .

Тригонометрическая форма записи комплексного числа: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$,

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Величина $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$ называется модулем комплексного числа z , а $\arg z = \varphi$ — аргументом числа z .

Легко проверить, что выполняются соотношения:

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z, \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z, \quad z\bar{z} = |z|^2$$

17.1. Представьте в тригонометрической форме числа: а) $1+i$ б) $2+\sqrt{3}+i$

в) $\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - i \sin \varphi}$

17.2. Какие множества на комплексной плоскости описываются следующими условиями? а) $|z| \leq 1$ б) $|z - i| \leq 1$ в) $|z| = z$ г) $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| < 1$ д)

$$|z - i| + |z + i| = 2$$

17.3. Решите в комплексных числах квадратные уравнения: а) $z^2 + z + 1 = 0$

б) $z^2 + 4z + 29 = 0$ в) $z^2 - (2+i)z + 2i = 0$ г) $z^2 - (3+2i)z + 6i = 0$

17.4. Комплексные числа z_1 и z_2 таковы, что $z_1 + z_2$ и $z_1 z_2$ — вещественные числа. Докажите, числа z_1 и z_2 либо оба вещественные, либо комплексно сопряжённые.

17.5. Вычислите: а) $(1+i)^{10}$ б) $(1+i\sqrt{3})^6$ в) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20}$

17.6. Решите в комплексных числах уравнение: $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 15 = 0$.

17.7. Докажите, что на комплексной плоскости равенством $|z - a| = k|z - b|$ при $a, b \in \mathbb{R}, k \neq 1$ задаётся окружность.