

Геометрия в комплексных координатах

Полезные соотношения: $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$, $|z|^2 = z\bar{z}$, $\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, $z\bar{z} = 1$ — уравнение единичной окружности с центром в нуле

18.1. Докажите, что для произвольных комплексных чисел z_1 и z_2 выполнено равенство:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Какой геометрический смысл оно имеет?

18.2. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом тогда и только тогда, когда комплексные координаты его вершин удовлетворяют условию $a + c = b + d$.

18.3. Точка M лежит на прямой, содержащей гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC . Докажите, что

$$MA^2 \cdot BC^2 + MB^2 \cdot AC^2 = MC^2 \cdot AB^2.$$

(Указание: можно ввести систему координат, в которой $a = -1, b = 1, c\bar{c} = 1, m = \bar{m}$).

Кубические уравнения

Уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ сводится к виду $y^3 + py + q = 0$ заменой $y = x + \frac{b}{3a}$. Уравнение такого вида решается по формуле Кардано-Тартальи:

$y = u + v$, где $u, v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$, причём корни выбраны так, что $uv = -\frac{p}{3}$.

18.4. Решите уравнение $z^3 - z - \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0$. Сколько действительных корней оно имеет?

18.5. Выпишите многочлен с целыми (или рациональными) коэффициентами, корнем которого будет число

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} \right)$$

Является ли число α рациональным?

18.6. Пусть $p, q \in \mathbb{R}$. Докажите, что в формуле Кардано-Тартальи возникают комплексные числа в промежуточных выкладках ровно тогда, когда уравнение

$z^3 + pz + q = 0$ можно решить тригонометрической заменой $z = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \varphi$.