

Коля принёс несколько коробок с яйцами, по 10 яиц в каждой коробке. Может ли быть, что он принёс 32 яйца? 43 яйца? 50 яиц?

Фольклор

8.1. При каких целых n число $n^4 + 4$ — составное?

8.2. Докажите, что при натуральных $m \neq n$ выполняются равенства:

а) $\text{НОД}(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\text{НОД}(m, n)} - 1, \quad a > 1;$

б) $\text{НОД}(2^{2^m} + 1, 2^{2^n} + 1) = 1.$

8.3. Пусть $\text{НОД}(a, b) = 1$. Докажите, что уравнение $ax + by = 1$ имеет хотя бы одно целочисленное решение.

8.4. Докажите, что существуют 1000 подряд идущих составных чисел.

8.5. Сколько существует делителей числа 2021^{2021} , кубический корень из которых является натуральным числом?

8.6. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\text{НОК}(a, b) = 90$ и $\text{НОК}(a, c) = 120$. Найдите $\text{НОК}(b, c)$.

8.7. Найдите все пары натуральных чисел m и n , для которых выполняется равенство:

$$\text{НОК}(m, n) - 2 \cdot \text{НОД}(m, n) = \frac{5mn}{7}.$$

8.8. Саша пишет на доске последовательность натуральных чисел. Первое число $N > 1$ написано заранее. Новые натуральные числа он получает так: вычитает из последнего записанного числа или прибавляет к нему любой его делитель, больший 1. При любом ли натуральном $N > 1$ Саша сможет написать на доске в какой-то момент число 2011?

8.9. Найдите разложение на простые множители наименьшего натурального числа, имеющего ровно 2020 различных натуральных делителей.

Коля принёс несколько коробок с яйцами, по 10 яиц в каждой коробке. Может ли быть, что он принёс 32 яйца? 43 яйца? 50 яиц?

Фольклор

8.1. При каких целых n число $n^4 + 4$ — составное?

8.2. Докажите, что при натуральных $m \neq n$ выполняются равенства:

а) $\text{НОД}(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\text{НОД}(m, n)} - 1, \quad a > 1;$

б) $\text{НОД}(2^{2^m} + 1, 2^{2^n} + 1) = 1.$

8.3. Пусть $\text{НОД}(a, b) = 1$. Докажите, что уравнение $ax + by = 1$ имеет хотя бы одно целочисленное решение.

8.4. Докажите, что существуют 1000 подряд идущих составных чисел.

8.5. Сколько существует делителей числа 2021^{2021} , кубический корень из которых является натуральным числом?

8.6. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\text{НОК}(a, b) = 90$ и $\text{НОК}(a, c) = 120$. Найдите $\text{НОК}(b, c)$.

8.7. Найдите все пары натуральных чисел m и n , для которых выполняется равенство:

$$\text{НОК}(m, n) - 2 \cdot \text{НОД}(m, n) = \frac{5mn}{7}.$$

8.8. Саша пишет на доске последовательность натуральных чисел. Первое число $N > 1$ написано заранее. Новые натуральные числа он получает так: вычитает из последнего записанного числа или прибавляет к нему любой его делитель, больший 1. При любом ли натуральном $N > 1$ Саша сможет написать на доске в какой-то момент число 2011?

8.9. Найдите разложение на простые множители наименьшего натурального числа, имеющего ровно 2020 различных натуральных делителей.